

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos
1999

ÉPOCA ESPECIAL

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

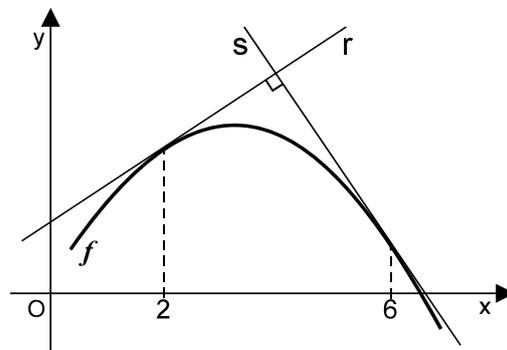
1. Considere a sucessão de termo geral $u_n = \log_2 \left(\frac{1}{n} \right)$

Indique o valor de $\lim u_n$

- (A) $-\infty$ (B) 0 (C) 1 (D) $+\infty$

2. Na figura estão representados:

- o gráfico de uma função f
- a recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- a recta s , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 6



Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indique o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

(A) $-\frac{3}{2}$

(B) $-\frac{4}{5}$

(C) $-\frac{2}{5}$

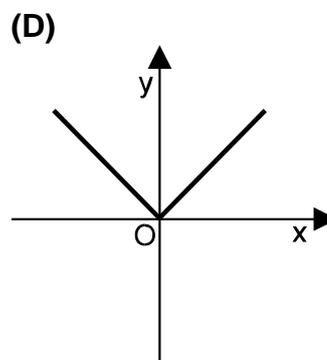
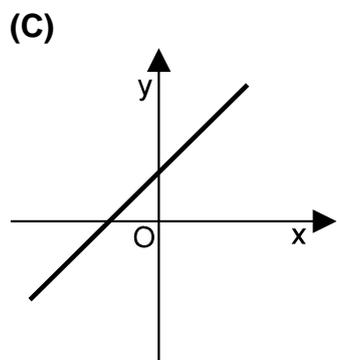
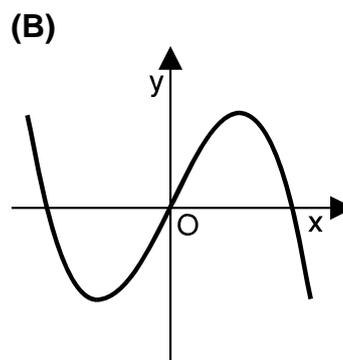
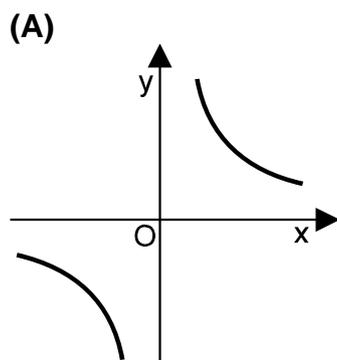
(D) $\frac{5}{3}$

3. Seja D o domínio de uma função g tal que $g(x) = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$

Indique qual das afirmações seguintes é **necessariamente falsa**.

- (A) $0 \in D$ (B) $\frac{3\pi}{4} \in D$ (C) $\pi \in D$ (D) $\frac{5\pi}{4} \in D$

4. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.



5. Seja h uma função de domínio \mathbb{R} cujo gráfico é uma parábola tal que:

- o vértice é o ponto $(0, 0)$;
- a directriz é a recta de equação $y = -1$.

Indique qual das igualdades seguintes é verdadeira para qualquer x pertencente a \mathbb{R} .

- (A) $h(x) = x^2$ (B) $h(x) = 2x^2$ (C) $h(x) = \frac{x^2}{4}$ (D) $h(x) = -\frac{x^2}{6}$

6. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$, a esfera \mathcal{E} definida pela condição $x^2 + (y - 7)^2 + z^2 \leq 9$. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?
- (A) Na esfera \mathcal{E} existem pontos do eixo Ox
 (B) Na esfera \mathcal{E} existem pontos do eixo Oy
 (C) O ponto $(7, 7, 0)$ pertence à esfera \mathcal{E}
 (D) O ponto $(0, 0, 7)$ pertence à esfera \mathcal{E}
7. Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} x = 0 \\ z = 3 \end{cases}$ define
- (A) o conjunto vazio
 (B) um ponto
 (C) uma recta
 (D) um plano
8. Escolhem-se aleatoriamente dois vértices distintos de um cubo. Qual é a probabilidade de o centro do cubo ser o ponto médio do segmento por eles definido?
- (A) $\frac{1}{{}^8C_2}$ (B) $\frac{4}{{}^8C_2}$ (C) $\frac{1}{8!}$ (D) $\frac{4}{8!}$
9. Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira.
- (A) $(10^{20} + 1)^6 = 10^{120} + 6 \times 10^{20} + 1$
 (B) $(10^{20} + 1)^7 = 10^{140} + 1$
 (C) $(10^{20} + 1)^8 > 10^{160} + 8 \times 10^{20} + 1$
 (D) $(10^{20} + 1)^9 < 10^{180} + 1$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = \ln(1+x) - x$
- a) Recorrendo à função derivada de g , mostre que g é decrescente.
- b) Tendo em conta a alínea anterior e o valor de $g(0)$, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a afirmação: $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}^+$

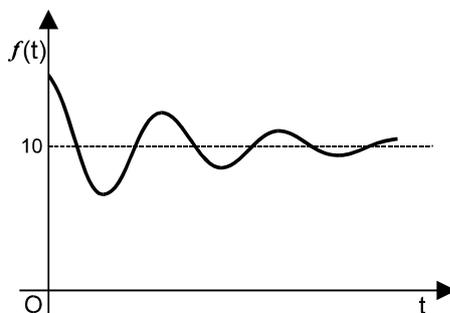
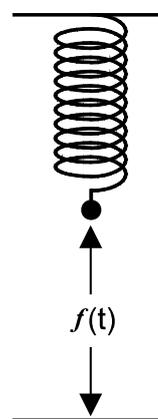
2. Uma bola suspensa de uma mola oscila verticalmente.

Admita que a distância (em *cm*) da bola ao solo, t segundos após um certo instante inicial, é dada por

$$f(t) = 10 + 5e^{-0,1t} \cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$$

com $t \in [0, +\infty[$

Na figura abaixo, apresenta-se parte da representação gráfica da função f .



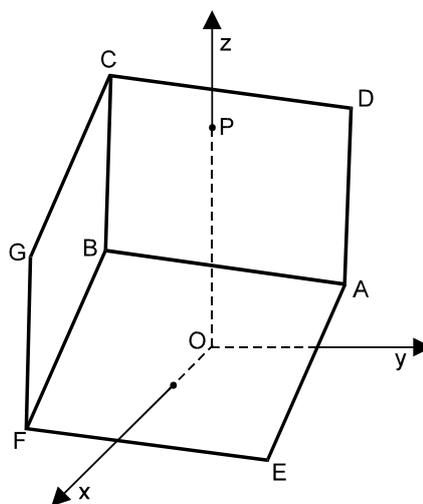
- a) Indique o valor de $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Interprete esse valor em termos do movimento da bola.
- b) Mostre que existe pelo menos um instante, entre o terceiro e o quarto segundos, em que a bola se encontra a sete centímetros do solo.
- c) Resolva a equação $f(t) = 10$.
A partir do conjunto solução obtido, indique quantas vezes, nos primeiros quinze segundos, a bola passa a dez centímetros do solo. Justifique a sua resposta.

3. Um grupo de jovens, formado por cinco rapazes e cinco raparigas, vai dividir-se em duas equipas, de cinco elementos cada uma, para disputarem um jogo de basquetebol. Supondo que a divisão dos dez jovens pelas duas equipas é feita ao acaso, determine a probabilidade de as equipas ficarem constituídas por elementos do mesmo sexo, isto é, de uma das equipas ficar só com rapazes e a outra, só com raparigas.

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

4. A figura abaixo representa um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.

- $[ABCD]$ é uma face do cubo
- $[EFGH]$ é a face oposta à face $[ABCD]$ (o ponto H não está representado na figura)
- $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ e $[DH]$ são quatro arestas do cubo
- O ponto A tem coordenadas $(3, 5, 3)$
- O ponto D tem coordenadas $(-3, 3, 6)$
- O ponto E tem coordenadas $(1, 2, -3)$



- a) Determine o volume do cubo.
- b) Determine as coordenadas do ponto H e comente a seguinte afirmação: o ponto H pertence a um dos eixos coordenados.
- c) O ponto P é o ponto de intersecção do eixo Oz com a face $[ABCD]$. Determine as coordenadas de P .

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte.....81

Cada questão certa +9
Cada questão errada..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

1 23
a) 12
b)..... 11

2 38
a) 10
b)..... 14
c)..... 14

3 20

4 38
a) 12
b)..... 12
c)..... 14

TOTAL 200