EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

1.ª FASE
2.ª CHAMADA
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, assim definida: $f(x) = \begin{cases} 3x, & se\ x \leq 1 \\ 2x, & se\ x > 1 \end{cases}$

Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = f\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

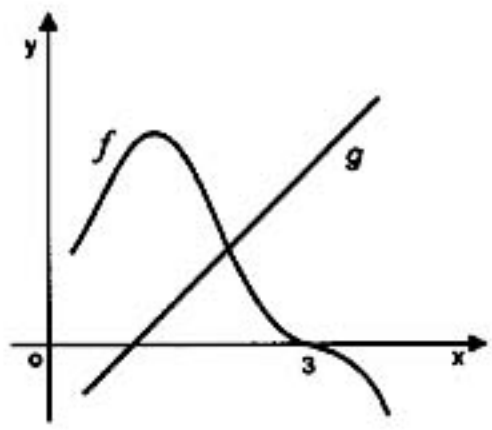
Indique qual das expressões seguintes define o termo geral de (u_n)

(A) $1 + \frac{1}{n}$ **(B)** $2 + \frac{2}{n}$ **(C)** $3 + \frac{3}{n}$ **(D)** $5 + \frac{1}{n}$

2. Na figura está representada parte dos gráficos de duas funções f e g, contínuas em $\mathbb{R}$.

O gráfico de f intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

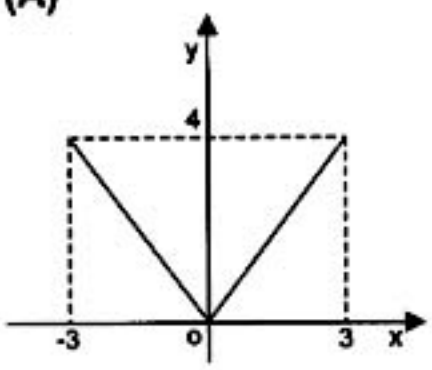
Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{g(x)}{f(x)}$



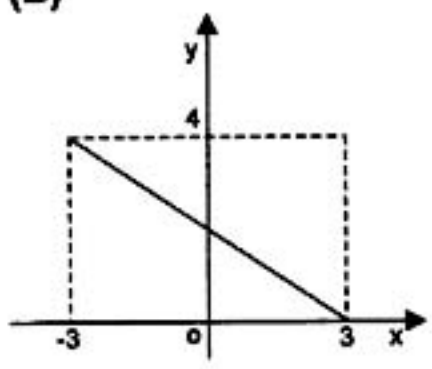
(A) 0 **(B)** 1 **(C)** $-\infty$ **(D)** $+\infty$

3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e que o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$?

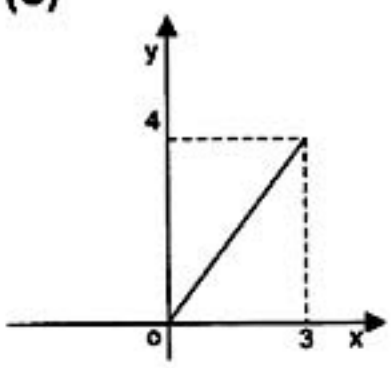
(A)



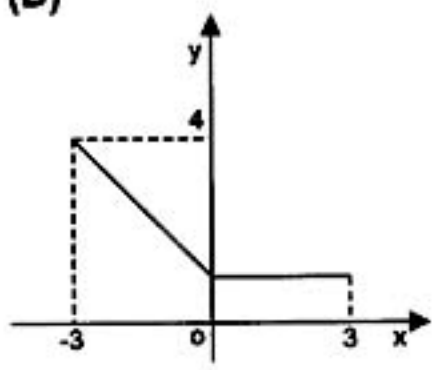
(B)



(C)

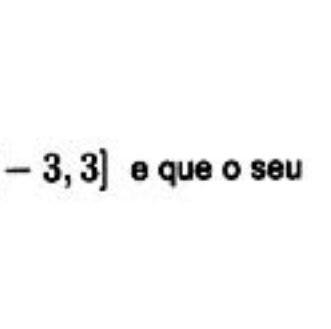


(D)



4. Na figura estão representados:

- um quadrado $[ABCD]$
- um arco de circunferência BD de centro em A



Indique qual das funções seguintes dá a área, em cm^2, da região sombreada, em função do comprimento x, em cm, do lado do quadrado.

(A) $f(x) = \frac{4x - \pi x^2}{2}$

(B) $f(x) = \frac{(1-\pi)x^2}{2}$

(C) $f(x) = \frac{(4-\pi)x^2}{4}$

(D) $f(x) = \frac{\pi - 1}{4} x^2$

5. Considere uma elipse $\mathcal{E}$ de focos F_1 e F_2.
Seja P um ponto da elipse $\mathcal{E}$ tal que $\overline{PF_1} = 6$ e $\overline{PF_2} = 14$.
Seja $[V_1 V_2]$ o eixo menor da elipse $\mathcal{E}$.
Qual é a distância de V_1 a F_1 ?

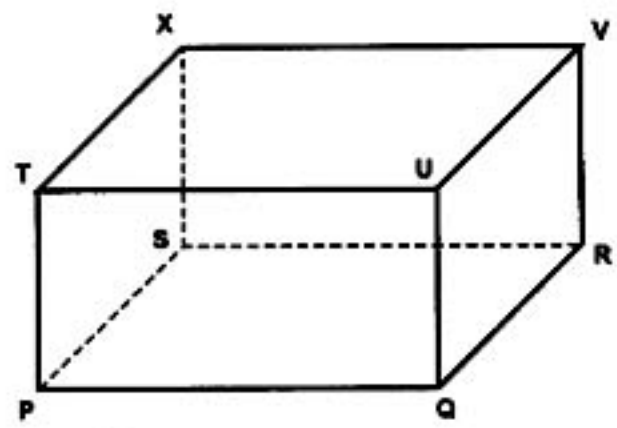
(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 10 **(D)** 20

6. Sejam α e β dois planos perpendiculares.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) Qualquer recta paralela a α é paralela a β.
(B) Qualquer recta paralela à intersecção de α e β é paralela a β.
(C) Qualquer recta perpendicular a α é perpendicular a β.
(D) Qualquer recta perpendicular à intersecção de α e β é perpendicular a β.

7. Na figura está representado um paralelepípedo rectângulo $[PQRSTUVX]$.



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{TP} \cdot \overrightarrow{QU} = 0$
(B) $\overrightarrow{UQ} \cdot \overrightarrow{TX} = 0$
(C) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{TU} = 0$
(D) $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PV} = 0$

8. O João tem num bolso do casaco uma moeda de 50$00, duas moedas de 100$00 e três moedas de 200$00.
Retirando duas moedas ao acaso, qual é a probabilidade de, com elas, perfazer a quantia exacta de 250$00?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{1}{4}$ **(D)** $\frac{1}{5}$

9. Uma nova marca de gelados oferece, em cada gelado, um de três bonecos: Rato Mickey, Peter Pan ou Astérix.
Sete amigos vão comprar um gelado cada um.
Supondo que os três bonecos têm igual probabilidade de sair, qual é a probabilidade de o Rato Mickey sair exactamente a dois dos sete amigos?

(A) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^5$
(B) $\frac{{}^7C_2}{7!}$
(C) ${}^7C_2 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2$
(D) $\frac{{}^7A_2}{7!}$

Segunda Parte

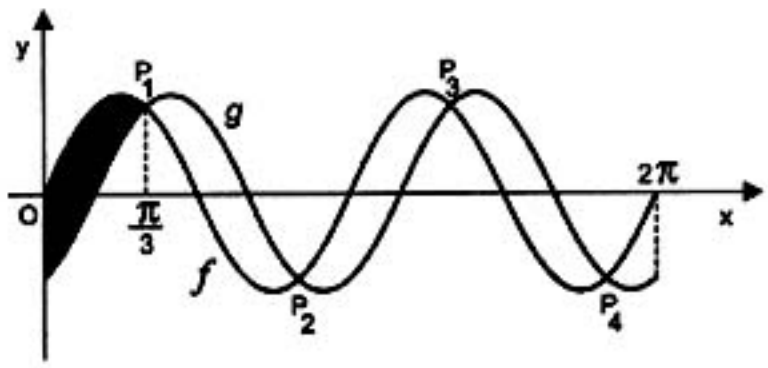
Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g, de domínio $[0, 2\pi]$, definidas por:

$f(x) = \text{sen}\,(2x)$

$g(x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$



P_1, P_2, P_3 e P_4 são os pontos de intersecção dos gráficos de f e de g.

A abcissa de P_1 é $\frac{\pi}{3}$

1.1. Mostre que são perpendiculares as rectas tangentes aos gráficos de f e de g no ponto P_1

1.2. Determine as coordenadas de P_2

1.3. Defina, por meio de uma condição, a região sombreada, incluindo a fronteira.

2. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

$v(t) = -3\ln(1 - 0{,}005\,t) - 0{,}01\,t$ (ln significa *logaritmo de base* e).

A variável t designa o tempo, em segundos, após o arranque.

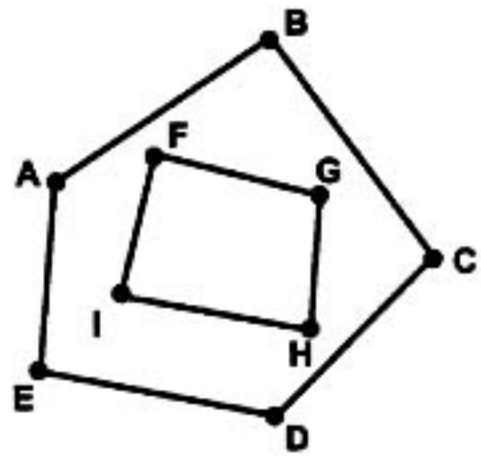
2.1. A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível.
Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$.

2.2. Verifique que a derivada da função v, no intervalo $[0, 160]$, é positiva e conclua qual é a velocidade máxima que o foguetão atinge neste intervalo. Apresente o resultado em quilómetros por segundo, arredondado às décimas.

V.S.F.F.

3. Na figura estão representados dois polígonos:

- um pentágono $[ABCDE]$
- um quadrilátero $[FGHI]$



Dos nove vértices representados, não existem três colineares.

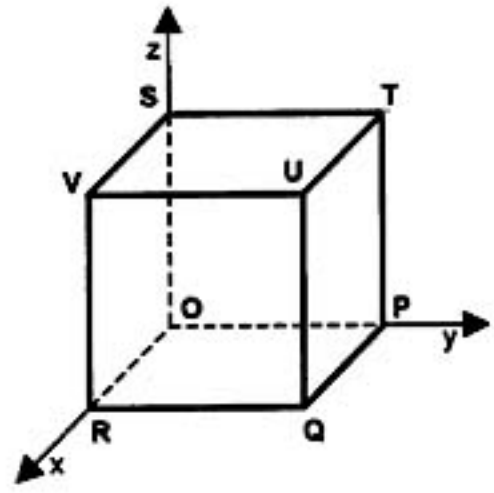
3.1. Determine quantos triângulos têm como vértices três dos nove pontos, de tal modo que dois vértices pertençam a um dos polígonos e o terceiro vértice pertença ao outro polígono.

3.2. A Sandra e o Jorge escolheram cada um, e em segredo, um dos nove vértices representados. Qual é a probabilidade de os dois vértices, assim escolhidos, pertencerem ambos ao mesmo polígono?
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

4. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. $Oxyz$.

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- a face $[OSVR]$ está contida no plano xOz
- a face $[OSTP]$ está contida no plano yOz
- uma equação do plano VTQ é $x+y+z=6$



4.1. Mostre que o volume do cubo é 27.

4.2. Determine uma equação da superfície esférica tal que:
- o centro é o simétrico de U, em relação ao plano xOy;
- o ponto Q pertence a essa superfície esférica.

4.3. Seja α o plano que contém o ponto S e é paralelo ao plano VTQ.
Prove que a recta RP está contida em α.

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa ..... +9
Cada resposta errada ..... - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
- **1.1.** 12
- **1.2.** 12
- **1.3.** 12

2. 25
- **2.1.** 7
- **2.2.** 18

3. 22
- **3.1.** 10
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**