EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **1.ª FASE**
1999 — **2.ª CHAMADA**

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte **81**

Cada resposta certa .... +9
Cada resposta errada.. - 3
Cada questão não respondida ou anulada 0

Nota: um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte **119**

1. 36
- **1.1.** 12
- **1.2.** 12
- **1.3.** 12

2. 25
- **2.1.** 7
- **2.2.** 18

3. 22
- **3.1.** 10
- **3.2.** 12

4. 36
- **4.1.** 12
- **4.2.** 12
- **4.3.** 12

TOTAL **200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	B	D	A	C	C	B	B	D	A
Versão 2	C	A	B	D	D	D	C	C	A

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir a cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **12**

$f'(x) = 2\cos(2x)$ 2

$f'(\frac{\pi}{3}) = 2\cos(\frac{2\pi}{3})$ 1

$f'(\frac{\pi}{3}) = -1$ 2

$g'(x) = -2\,\text{sen}(2x - \frac{5\pi}{6})$ 2

$g'(\frac{\pi}{3}) = -2\,\text{sen}(-\frac{\pi}{6})$ 1

$g'(\frac{\pi}{3}) = 1$ 2

Conclusão 2

Nota:
Não deve ser valorizada a escrita das equações das rectas tangentes.

1.2. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Concluir que as funções são ambas periódicas de período π 2

Concluir que a abcissa de P_3 é $\frac{\pi}{3} + \pi$ 2

Referir que, por observação do gráfico, a abcissa de P_2 é a única

solução da equação $f(x) = g(x)$ no intervalo $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} + \pi\right[$ 1

Verificar que $f(x + \frac{\pi}{2}) = -f(x)$ 1

Verificar que $g(x + \frac{\pi}{2}) = -g(x)$ 1

$f(\frac{\pi}{3}) = g(\frac{\pi}{3}) \Rightarrow f(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2})$ 2

Concluir que a abcissa de P_2 é $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ 1

Concluir que a ordenada de P_2 é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

V.S.F.F.

2.º Processo

Referir que, por observação do gráfico, a abcissa de P_2

parece ser $\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6}$ 3

Verificar que $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3

Verificar que $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 3

Concluir que as coordenadas de P_2 são $\left(\frac{5\pi}{6}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 3

3.º Processo

Escrever a equação $\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 1

Resolver a equação (por exemplo, em $\mathbb{R}$) 7

$\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)\right]$ 1

$\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2x) = \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{3} - 2x\right)$ 1

$\Leftrightarrow 2x = \frac{4\pi}{3} - 2x + 2k\pi \ \vee$
$2x = \pi - \frac{4\pi}{3} + 2x + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$ 3

ou

$\operatorname{sen}(2x) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right)$ 2

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - 2x = 2x - \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \ \vee$
$\frac{\pi}{2} - 2x = -2x + \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$ 2

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, \ k \in \mathbb{Z}$ 3

Concluir que a abcissa de P_2 é $\frac{5\pi}{6}$ 2

Concluir que a ordenada de P_2 é $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ 2

1.3. .... **12**

Escrever a condição $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ 4

Escrever a condição $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \leq y \leq \operatorname{sen}(2x)$ 6

Conjunção das duas condições 2

Nota:

O examinando pode escrever $g(x) \leq y \leq f(x)$ em vez de $\cos\left(2x - \frac{5\pi}{6}\right) \leq y \leq \operatorname{sen}(2x)$.

Neste caso, o examinando pode escrever apenas $x \leq \frac{\pi}{3}$ em vez de $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

2.1. .... **7**

Justificar que $t \geq 0$ 1

Justificar que $t \leq 160$ 6

Concluir que a massa inicial do combustível é de 120 toneladas 2

Concluir que o combustível se esgota ao fim de 160 seg. 4

Nota:

Não se exige que o examinando verifique que a expressão

$$-3\ \ln(1 - 0{,}005\,t) - 0{,}01\,t$$

tem significado para qualquer $t \in [0, 160]$.

2.2. .... **18**

Determinar v' 5

$$v'(t) = -3\,\frac{-0{,}005}{1-0{,}005\,t} - 0{,}01$$ 4

$$v'(t) = \frac{0{,}015}{1-0{,}005\,t} - 0{,}01$$ 1

Verificar que $v'(t) > 0$ 8

$$\frac{0{,}015}{1-0{,}005\,t} - 0{,}01 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0{,}015 > 0{,}01\,(1 - 0{,}005\,t)$ **(ver nota 1)** 4

$\Leftrightarrow t > -100$ 2

Concluir que $v'(t) > 0$, pois $t \in [0, 160]$ 2

ou

$$\frac{0{,}015}{1-0{,}005\,t} - 0{,}01 > 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \dfrac{0{,}005 + 0{,}00005\,t}{1-0{,}005\,t} > 0$ 2

Concluir que $v'(t) > 0$ **(ver nota 2)** 6

Concluir que a velocidade máxima é $v\,(160)$ 3

$v\,(160) \approx 3,2$ **(ver nota 3)** 2

Notas:

1. Ao desembaraçar de denominadores, o examinando deverá referir que o denominador é positivo para qualquer $t \in [0, 160]$. Se não o fizer, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. O examinando pode concluir que a fracção $\dfrac{0{,}005 + 0{,}00005\,t}{1-0{,}005\,t}$ é sempre positiva, para qualquer $t \in [0, 160]$, por, pelo menos, dois processos:
   - através de uma tabela de sinais;
   - através da constatação de que, quer o numerador, quer o denominador da fracção são positivos, para qualquer $t \in [0, 160]$.

3. Se o examinando não apresentar o resultado com o arredondamento pedido, deverá ser penalizado em 1 ponto.

3.1. 10

Número pedido $= {}^5C_2 \times 4 + {}^4C_2 \times 5$ $\left(\text{ou } {}^9C_3 - {}^5C_3 - {}^4C_3\right)$............. 9

Número pedido $= 70$ 1

3.2. 12

Número de casos possíveis $= 9^2$ 4

Número de casos favoráveis $= 4^2 + 5^2$ 6

Probabilidade pedida $= \frac{4^2+5^2}{9^2}$ 1

Probabilidade pedida $\approx 51\%$ 1

Nota:

Se o examinando escrever $\dfrac{{}^4A_2 + {}^5A_2}{{}^9A_2}$ ou $\dfrac{{}^4C_2 + {}^5C_2}{{}^9C_2}$, que corresponde à situação de serem necessariamente diferentes os dois pontos escolhidos pela Sandra e pelo Jorge, deve ser cotado em 5 dos 11 pontos previstos para a obtenção da fracção $\frac{4^2+5^2}{9^2}$.

4.1. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar o comprimento a da aresta do cubo 11

O ponto Q tem coordenadas $(a, a, 0)$.. 5

$Q \in VTQ \Leftrightarrow a + a + 0 = 6$.. 5

$a = 3$ 1

$3^3 = 27$ 1

2.º Processo

Volume do cubo igual a 27 é equivalente a dizer que o comprimento da aresta é igual a 3 1

Comprimento da aresta igual a 3 é equivalente a dizer que as cordenadas de V, T e Q são, respectivamente $(3,0,3)$, $(0,3,3)$ e $(3,3,0)$ 3

Coordenadas de V, T e Q serem $(3,0,3)$, $(0,3,3)$ e $(3,3,0)$, respectivamente, é equivalente, dado que os três pontos são não colineares, a VTQ ser definido por $x + y + z = 6$ 8

V.S.F.F.

4.2. 12

Centro da superfície esférica: $(3, 3, -3)$ 4

Raio da superfície esférica $= 3$ 4

Escrever a condição $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$ 4

Nota:

Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 9$.

- Escrever " $\leq$ " em vez de " $=$ ": penalização de 2 pontos.
- Escrever 3 em vez de 9 : penalização de 3 pontos.
- Escrever $(x+3)^2 + (y+3)^2 + (z-3)^2 = 9$: penalização de 3 pontos.

4.3. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Justificar que o plano α é o plano PRS **(ver nota)**....................................... 10

Conclusão 2

Nota:

Esta justificação pode ser feita, por exemplo, do seguinte modo:

- a recta RP é paralela ao plano VTQ (pois RP é paralela a VT);
- a recta RS é paralela ao plano VTQ (pois RS é paralela a QT);
- existem, portanto, no plano PRS, duas rectas (RS e RP) concorrentes, que são paralelas ao plano VTQ;
- logo, os planos PRS e VTQ são paralelos;
- portanto, o plano PRS contém S e é paralelo a VTQ, pelo que o plano α é o plano PRS.

2.º Processo

Escrever uma equação do plano α 6

Justificar que R pertence ao plano α 2

Justificar que P pertence ao plano α 2

Conclusão 2