EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos
1999

2.ª FASE
VERSÃO 1

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

V.S.F.F.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas, das quais só uma está correcta.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, a questão será anulada, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- Não apresente cálculos.

1. Considere a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2-4 & \text{se } x > 0 \end{cases}$

Indique o conjunto dos zeros de f.

(A) $\{-2, 2\}$ **(B)** $\{-2, -1, 2\}$

(C) $\{2\}$ **(D)** $\{-1, 2\}$

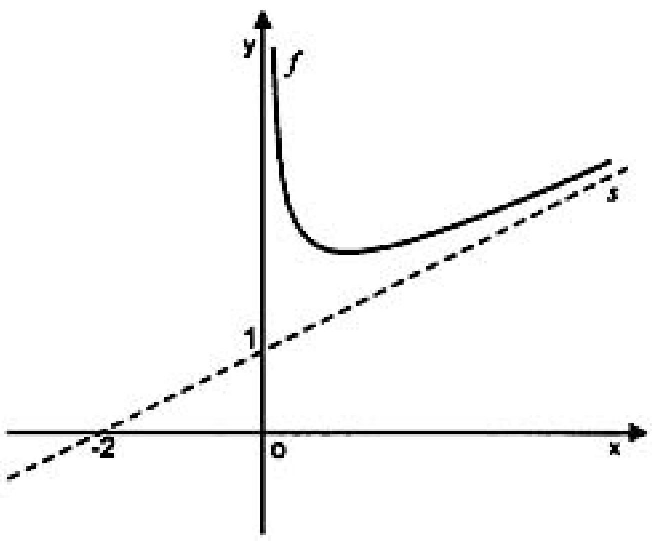
2. Indique qual das expressões seguintes define uma função **injectiva**, de domínio $\mathbb{R}$.

(A) $\cos x$ **(B)** $x^2 - x$

(C) $|x| + 1$ **(D)** x^3

3. Na figura ao lado está representada graficamente uma função f, de domínio $\mathbb{R}^+$.

A recta s, que contém os pontos $(-2, 0)$ e $(0, 1)$, é assimptota do gráfico de f.

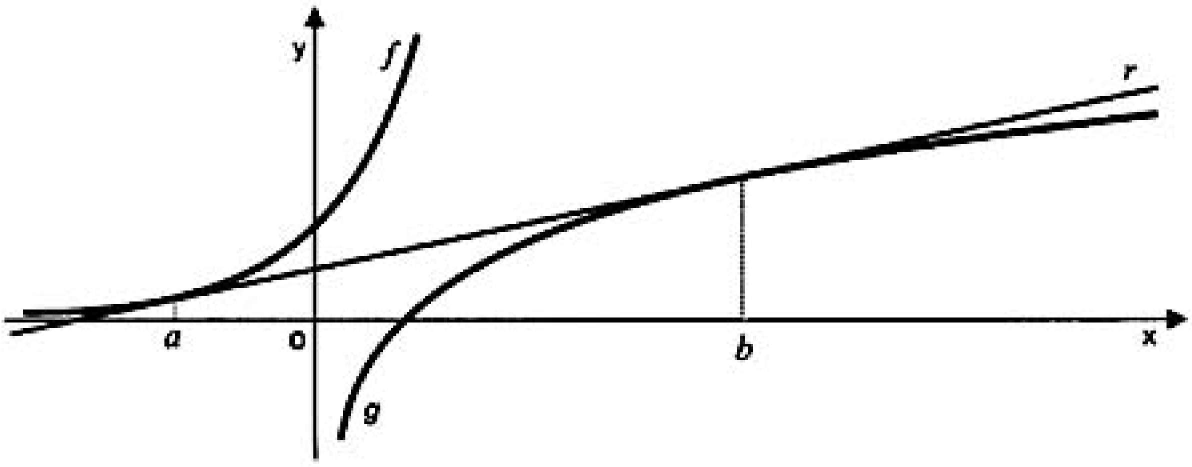


Indique o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

(A) -2 **(B)** 0 **(C)** $\frac{1}{2}$ **(D)** 1

4. Na figura abaixo estão representadas graficamente duas funções:

- a função f, definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = e^x$
- a função g, definida em $\mathbb{R}^+$ por $g(x) = \ln x$ (ln designa logaritmo na base e)



A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

(A) $e^a = \frac{1}{b}$ **(B)** $e^a = \ln b$ **(C)** $e^{a+b} = 1$ **(D)** $\ln(ab) = 1$

5. Num referencial o. n. $Oxyz$, qual das seguintes condições define uma recta paralela ao eixo Oz?

(A) $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ **(B)** $(x, y, z) = (1, 2, 0) + k(1, 1, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

(C) $z = 1$ **(D)** $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = z$

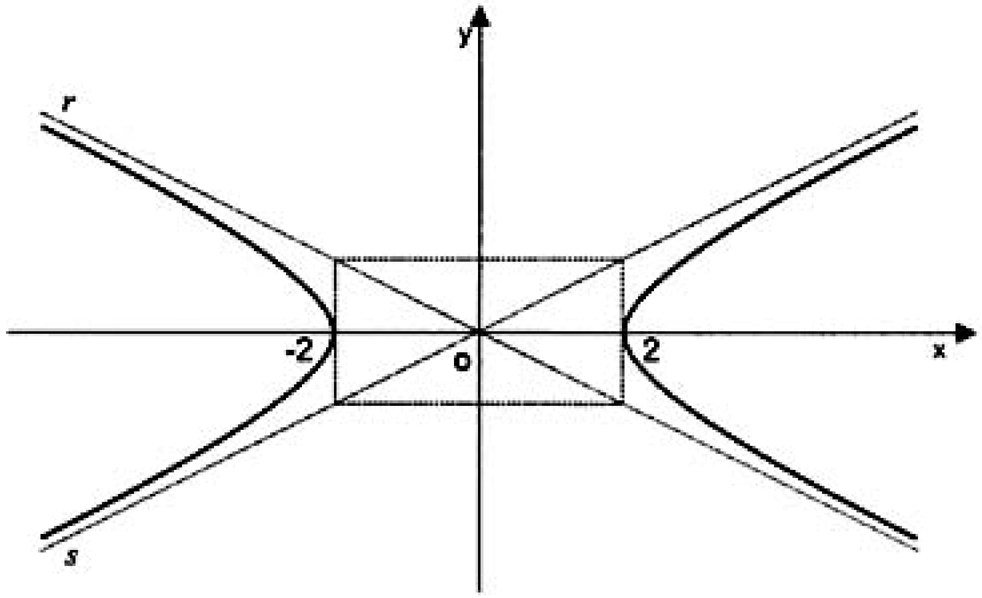
6. Num referencial o. n. $Oxyz$, a condição $\begin{cases} 3x + 4y + 5z = 2 \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \end{cases}$ define

(A) um ponto **(B)** o conjunto vazio

(C) uma recta **(D)** um plano

V.S.F.F.

7. Na figura abaixo está representada graficamente uma hipérbole.



Os vértices da hipérbole são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$.

As assimptotas da hipérbole são as rectas r e s, de equações $y=-\frac{x}{2}$ e $y=\frac{x}{2}$, respectivamente.

Qual das condições seguintes é uma equação desta hipérbole?

(A) $y^2-x^2=2$ **(B)** $x^2-4y^2=4$

(C) $2x^2-y^2=8$ **(D)** $x^2-y^2=4$

8. De quantas maneiras se podem sentar três raparigas e quatro rapazes, num banco de sete lugares, sabendo que em cada um dos extremos fica uma rapariga?

(A) 120 **(B)** 240 **(C)** 720 **(D)** 5040

9. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem ainda direito a dois lances livres.
O Manuel vai tentar encestar.
Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, qual é a probabilidade de o jogo terminar empatado?

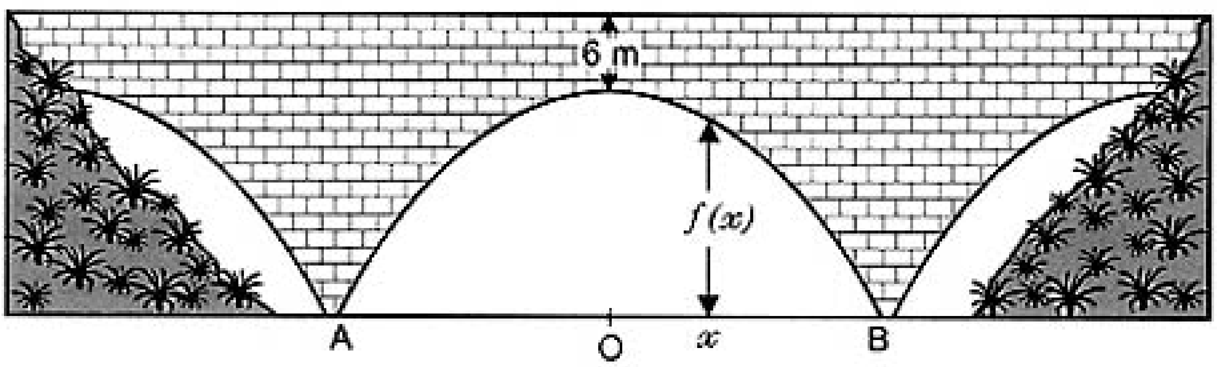
(A) $0,14$ **(B)** $0,21$ **(C)** $0,42$ **(D)** $0,7$

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

Atenção: quando não é indicada a aproximação que se pede para um resultado, pretende-se sempre o valor exacto.

1. A figura representa uma ponte sobre um rio.



A distância mínima do **arco central** da ponte ao tabuleiro é 6 metros.

Sejam A e B os pontos de intersecção do **arco central** da ponte com o nível da água do rio, e seja O o ponto médio de $[AB]$.

Considere a recta AB como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e onde uma unidade corresponde a um metro.

Para cada ponto situado entre A e B, de abcissa x, a altura do arco, em metros, é dada por

$$f(x) = 36 - 9\left(e^{0.06x} + e^{-0.06x}\right)$$

1.1. Recorrendo ao estudo da derivada da função f, mostre que, tal como a figura sugere, é no ponto de abcissa zero que a altura do arco é máxima.

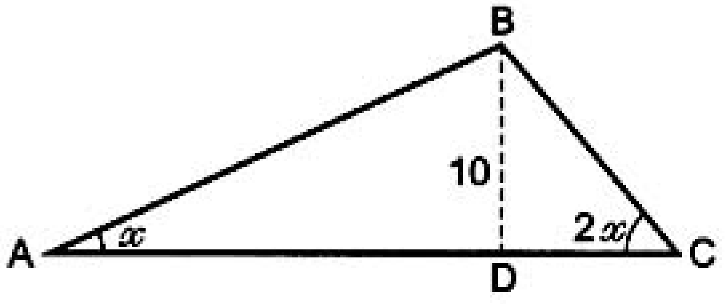
1.2. Uma empresa está a estudar a hipótese de construir uma barragem neste rio. Se tal empreendimento se concretizasse, o nível das águas no local da ponte subiria 27 metros.
Nesse caso, a ponte ficaria totalmente submersa? Justifique a sua resposta.

1.3. Mostre que a distância, em metros, entre A e B é um valor compreendido entre 43 e 44.

2. Na figura está representado um triângulo $[ABC]$.

Tem-se que:

- x designa a amplitude do ângulo BAC
- a amplitude do ângulo BCA é igual ao dobro da amplitude do ângulo BAC
- a altura $\overline{BD}$ é igual a 10



Seja $g(x) = \dfrac{75 - 25\ \text{tg}^2\, x}{\text{tg}\, x}$

2.1. Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $g(x)$, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$

2.2. Considere o triângulo $[ABC]$ quando $x = \frac{\pi}{4}$

Classifique-o quanto aos ângulos e quanto aos lados e prove que a sua área ainda é dada por $g(x)$.

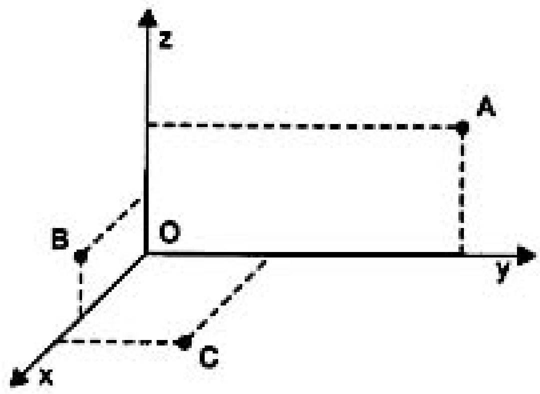
3. Para representar Portugal num campeonato internacional de hóquei em patins foram seleccionados dez jogadores: dois guarda-redes, quatro defesas e quatro avançados.

3.1. Sabendo que o treinador da selecção nacional opta por que Portugal jogue sempre com um guarda-redes, dois defesas e dois avançados, quantas equipas diferentes pode ele constituir?

3.2. Um patrocinador da selecção nacional oferece uma viagem a cinco dos dez jogadores seleccionados, escolhidos ao acaso.

Qual é a probabilidade de os dois guarda-redes serem contemplados com essa viagem? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

4. Na figura estão representados três pontos, em referencial o. n. $Oxyz$



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(0,5,2)$
- o ponto B pertence ao plano xOz
- o ponto C pertence ao plano xOy
- a recta BC tem equação vectorial $(x,y,z)=(5,4,-1)+k\,(1,2,-1),\ k\in\mathbb{R}$

4.1. Mostre que o ponto B tem coordenadas $(3,0,1)$ e que o ponto C tem coordenadas $(4,2,0)$.

4.2. Mostre que o triângulo $[ABC]$ é rectângulo em C.

4.3. Considere a superfície esférica de centro em A, cuja intersecção com o plano xOy é uma circunferência de raio 3. Determine uma equação dessa superfície esférica.

FIM

Formulário

$\operatorname{sen}(2x) = 2 \,.\, \operatorname{sen} x \,.\, \cos x$ $\qquad$ $\cos(2x) = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(2x) = \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$

V.S.F.F.

COTAÇÕES

Primeira Parte	**81**
Cada resposta certa	+9
Cada resposta errada	- 3
Cada questão não respondida ou anulada	0

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte		**119**
1.		35
1.1.	12	
1.2.	10	
1.3.	13	
2.		26
2.1.	14	
2.2.	12	
3.		22
3.1.	10	
3.2.	12	
4.		36
4.1.	12	
4.2.	12	
4.3.	12	

TOTAL **200**