EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12.° Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.° 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos Gerais e Cursos Tecnológicos

Duração da prova: 120 minutos — **2.ª FASE**
1999

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

COTAÇÕES

Primeira Parte			**81**
Cada resposta certa		+9	
Cada resposta errada		- 3	
Cada questão não respondida ou anulada		0	

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte			**119**
1.		35	
1.1.	12		
1.2.	10		
1.3.	13		
2.		26	
2.1.	14		
2.2.	12		
3.		22	
3.1.	10		
3.2.	12		
4.		36	
4.1.	12		
4.2.	12		
4.3.	12		
TOTAL			**200**

V.S.F.F.

CRITÉRIOS DE CLASSIFICAÇÃO

Primeira Parte

A não indicação da versão da prova implica a anulação da primeira parte.

Deverão ser anuladas todas as questões com resposta de leitura ambígua (letra confusa, por exemplo) e todas as questões em que o examinando dê mais do que uma resposta.

As respostas certas são as seguintes:

Questões	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Versão 1	C	D	C	A	A	A	B	C	C
Versão 2	B	D	B	B	C	D	A	D	C

Na tabela seguinte indicam-se os pontos a atribuir, nesta primeira parte, em função do número de respostas certas e do número de respostas erradas.

Resp. erradas / Resp. certas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	9	6	3	0	0	0	0	0	0	
2	18	15	12	9	6	3	0	0		
3	27	24	21	18	15	12	9			
4	36	33	30	27	24	21				
5	45	42	39	36	33					
6	54	51	48	45						
7	63	60	57							
8	72	69								
9	81									

Segunda Parte

Critérios gerais

A cotação a atribuir em cada alínea deverá ser sempre um número inteiro de pontos.

O professor deverá valorizar o raciocínio do examinando em todas as questões.

Algumas questões da prova podem ser correctamente resolvidas por mais do que um processo. Sempre que um examinando utilizar um processo de resolução não contemplado nestes critérios, caberá ao professor corrector adoptar um critério de distribuição da cotação que julgue adequado e utilizá-lo em situações idênticas.

Pode acontecer que um examinando, ao resolver uma questão, não explicite todos os passos previstos nas distribuições apresentadas nestes critérios. Todos os passos não expressos pelo examinando, mas cuja utilização e/ou conhecimento estejam implícitos na resolução da questão, devem receber a cotação indicada.

Erros de contas ocasionais, que não afectem a estrutura ou o grau de dificuldade da questão, não devem ser penalizados em mais de dois pontos.

Critérios específicos

1.1. .... **12**

Calcular $f'(x)$ 4

$f'(x) = -9\left(e^{0,06x} + e^{-0,06x}\right)'$ 1

$f'(x) = -9\left(0,06\,e^{0,06x} - 0,06\,e^{-0,06x}\right)$ 3

Determinar o zero de f' **(ver nota 1)** 4

$-9\left(0,06\,e^{0,06x} - 0,06\,e^{-0,06x}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 0,06\,e^{0,06x} - 0,06\,e^{-0,06x} = 0$ 1

$\Leftrightarrow e^{0,06x} = e^{-0,06x}$ 1

$\Leftrightarrow 0,06\,x = -0,06\,x$ 1

$\Leftrightarrow x = 0$ 1

Verificar que 0 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo **(ver nota 2)** 4

Notas:

1. Caso o examinando se limite a verificar que $f'(0) = 0$, não prova que f' tem um único zero, pelo que deve ser cotado em apenas 2 dos 4 pontos previstos para a determinação do zero de f'.

2. O examinando pode mostrar que 0 é o valor de x para o qual f toma o seu valor máximo por, pelo menos, dois processos:

   - através do estudo da variação do sinal de f', que pode ser apresentado por meio de um quadro;

   - através do gráfico da função. Neste caso, o examinando deverá apresentar uma justificação do tipo:

     «Da análise do gráfico, verifica-se que f é crescente até um certo ponto e decrescente depois desse ponto. Logo, o único valor que anula f' é o ponto onde f toma o seu valor máximo (como a função f é diferenciável, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

     ou, mais simplesmente,

     «Da análise do gráfico, verifica-se que o único valor que anula f' é o ponto onde f é máximo (como a função f é diferenciável, se ela tivesse outro máximo, a sua derivada não teria apenas um zero).»

1.2. 10

$f(0) = 18$ 5

Altura do tabuleiro $= 24$ m 2

Concluir que a ponte ficaria totalmente submersa 3

1.3. 13

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, três processos:

1.º Processo

Equacionar o problema (escrever a equação $f(x) = 0$) 4

Resolver (analiticamente) a equação $f(x) = 0$ 6

$$f(x) = 0$$

$\Leftrightarrow e^{0,06\,x} + e^{-0,06\,x} = 4$ 1

$\Leftrightarrow \left(e^{0,06\,x}\right)^2 - 4\,e^{0,06\,x} + 1 = 0$ 1

$\Leftrightarrow e^{0,06\,x} = 2 \pm \sqrt{3}$ 1

$\Leftrightarrow 0,06\,x = \ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)$ 1

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\ln\left(2 \pm \sqrt{3}\right)}{0,06}$ 1

$\Rightarrow x \approx \pm\, 21,95$ 1

Conclusão ($\overline{AB} \approx 43,9$) 3

2.º Processo

Equacionar o problema (escrever a equação $f(x) = 0$) ou referir que as abcissas dos pontos A e B são os zeros de f 4

Utilizar a calculadora gráfica para encontrar valores aproximados dos zeros de f (os valores deverão ter, no mínimo, uma casa decimal, tendo em vista a conclusão pretendida) 6

Conclusão ($\overline{AB} \approx 43,9$) 3

3.º Processo

$43 < \overline{AB} < 44 \;\Leftrightarrow 21,5 < \overline{OB} < 22$ 2

$21,5 < \overline{OB} < 22 \;\Leftrightarrow$ a abcissa de B pertence a $]21,5\,;\,22[$ 4

Como f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ (a sua derivada é negativa em $\mathbb{R}^+$), e como $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$, vem que o único zero de f em $\mathbb{R}^+$ está compreendido entre $21,5$ e 22, pelo que a abcissa de B pertence, efectivamente, a $]21,5\,;\,22[$ **(ver notas 1 e 2)**.............................. 7

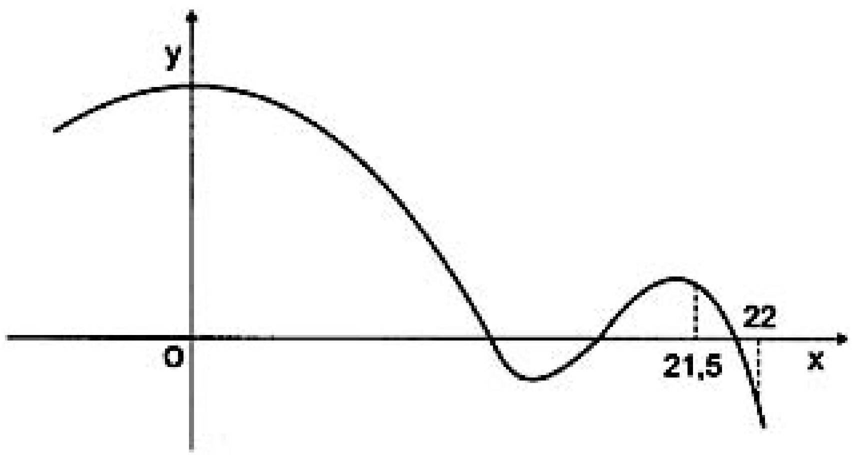
Notas:

1. Designámos por f a função definida em $\mathbb{R}$ por $36 - 9(e^{0,06x} + e^{-0,06x})$, ou seja, designámos por f uma extensão a $\mathbb{R}$ da função f do enunciado, a qual está definida entre as abcissas dos pontos A e B. Trata-se, evidentemente, de um abuso de notação que não tem qualquer inconveniente.

2. Note-se que não está completa uma resolução do tipo:

   «Como f é contínua e se tem $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$, vem, pelo Teorema de Bolzano, que f tem um zero em $]21,5;22[$, pelo que a abcissa de B está neste intervalo.»

   É necessário, em complemento, garantir a unicidade do zero de f em $\mathbb{R}^+$, o que pode ser feito através do estudo da monotonia de f. De facto, como a figura abaixo ilustra, se f tivesse mais do que um zero em $\mathbb{R}^+$, como se poderia afirmar que aquele que nos interessa está compreendido entre $21,5$ e 22?



Note-se, por outro lado, que **não é necessário evocar o Teorema de Bolzano, nem a continuidade** de f. A existência de um zero da função em $\mathbb{R}^+$ está garantida pelo enunciado (é a abcissa do ponto B). Só temos de provar que esse zero está compreendido entre $21,5$ e 22. Para isso, basta garantir que f é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^+$ e que $f(21,5) > 0$ e $f(22) < 0$ (se, em $\mathbb{R}^+$, o zero de f, que sabemos que existe, não estivesse entre $21,5$ e 22, a função não seria estritamente decrescente).

Se o examinando basear a sua resolução no Teorema de Bolzano e não provar que, em $\mathbb{R}^+$, f só tem um zero, deverá ser cotado em 4 dos 7 pontos previstos para esta parte da resolução do problema. Por outro lado, se o examinando se limitar a determinar valores aproximados de $f(21,5)$ e de $f(22)$ e não acrescentar mais nada, deverá ser cotado em 2 desses 7 pontos.

V.S.F.F.

2.1. 14

Área do triângulo $= \dfrac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$ 1

$\overline{AD} = \dfrac{10}{\operatorname{tg} x}$ 3

$\overline{CD} = \dfrac{10}{\operatorname{tg}(2x)}$ 3

$\overline{AC} = \dfrac{10}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{10}{\operatorname{tg}(2x)}$ 1

Restantes cálculos (ver nota).. 6

Nota:
Existem muitos processos possíveis para chegar à expressão pretendida. Apresentam-se a seguir dois desses processos, com a respectiva distribuição dos 6 pontos.

$\overline{AC} = \dfrac{15-5\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$ 3

$g(x) = 5 \times \dfrac{15-5\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$ 2

$g(x) = \dfrac{75-25\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$ 1

ou

$g(x) = \left(\dfrac{10}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{10}{\operatorname{tg}(2x)}\right) \times 5$ 2

$g(x) = \dfrac{50}{\operatorname{tg} x} + \dfrac{50\,(1-\operatorname{tg}^2 x)}{2\operatorname{tg} x}$ 2

$g(x) = \dfrac{75-25\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x}$ 2

2.2. 12

Classificar o triângulo 6
- Referir que o triângulo é rectângulo 3
- Referir que o triângulo é isósceles 3

Referir que a área do triângulo é $\dfrac{10 \times 10}{2} = 50$ 2

$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 50$ 4
- $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ 2
- Restantes cálculos 2

3.1. .... **10**

Número de maneiras de escolher o guarda-redes $= {}^{2}C_1$ (ou 2) 1

Número de maneiras de escolher os dois defesas $= {}^{4}C_2$ 1

Número de maneiras de escolher os dois avançados $= {}^{4}C_2$ 1

Número pedido $= {}^{2}C_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{4}C_2$ 5

${}^{2}C_1 \times {}^{4}C_2 \times {}^{4}C_2 = 72$ 2

3.2. .... **12**

A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, dois processos, consoante o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos.

1.º Processo

O espaço de acontecimentos é a colecção de conjuntos $\{a, b, c, d, e\}$, em que a, b, c, d e e designam cinco dos dez jogadores.

Número de casos possíveis $= {}^{10}C_5$

Número de casos favoráveis $= {}^{8}C_3$ (ou ${}^{2}C_2 \times {}^{8}C_3$)

2.º Processo

O espaço de acontecimentos é o conjunto das sequências (a, b, c, d, e), sem elementos repetidos, em que a, b, c, d e e designam cinco dos dez jogadores.

Número de casos possíveis $= {}^{10}A_5$

Número de casos favoráveis $= {}^{5}C_2 \times 2 \times {}^{8}A_3$ (ou ${}^{5}A_2 \times {}^{8}A_3$)

Qualquer que seja o modelo adoptado para formar o espaço de acontecimentos, a distribuição das cotações deve ser feita como segue:

Número de casos possíveis 5

Número de casos favoráveis 5

Fracção (Regra de Laplace) 1

Resultado na forma de fracção irredutível 1

Notas:

1. Qualquer que seja o modelo adoptado, não se exige que o examinando explicite o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.

   Por exemplo, numa resposta como $\frac{{}^{8}C_3}{{}^{10}C_5} = \frac{2}{9}$ está implícita a contagem correcta dos casos possíveis e dos casos favoráveis.

V.S.F.F.

2. Se o examinando considerar o número de casos possíveis de acordo com um dos modelos e o número de casos favoráveis de acordo com outro modelo, deverá ser cotado em 5 dos 10 pontos previstos para o conjunto dos dois números.

   Por exemplo, uma resposta como $\frac{{}^{8}C_3}{{}^{10}A_5} = \frac{1}{540}$ deve ser cotada com 7 pontos (5+1+1).

3. Se o examinando se **limitar a apresentar um resultado**, como por exemplo $\frac{2}{9}$, deverá ser cotado com 0 pontos.

4.1. 12

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos:

1.º Processo

Escrever a equação $4+2k=0$ 3

$4+2k=0 \Leftrightarrow k=-2$ 1

Concluir que B tem coordenadas $(3,0,1)$ 2

Escrever a equação $-1-k=0$ 3

$-1-k=0 \Leftrightarrow k=-1$ 1

Concluir que C tem coordenadas $(4,2,0)$ 2

2.º Processo

Escrever a condição $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{-1}$ (ou outra equivalente) 2

Atribuir a y o valor 0, na condição $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{-1}$ 3

Concluir que B tem coordenadas $(3,0,1)$ 2

Atribuir a z o valor 0, na condição $\frac{x-5}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+1}{-1}$ 3

Concluir que C tem coordenadas $(4,2,0)$ 2

3.º Processo

Mostrar que o ponto $(3, 0, 1)$ pertence à recta de equação
$(x, y, z) = (5, 4, -1) + k\,(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$ 3

Referir que o ponto $(3, 0, 1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Concluir que $(3, 0, 1)$ é o ponto B..1

Mostrar que o ponto $(4, 2, 0)$ pertence à recta de equação
$(x, y, z) = (5, 4, -1) + k\,(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$ 3

Referir que o ponto $(4, 2, 0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Concluir que $(4, 2, 0)$ é o ponto C..1

4.º Processo

Referir que o ponto $(3, 0, 1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Referir que o ponto $(4, 2, 0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Determinar o vector $(4, 2, 0) - (3, 0, 1) = (1, 2, -1)$ 2

Referir que esse vector é o vector director da recta BC 2

Mostrar que os pontos $(4, 2, 0)$, $(3, 0, 1)$ e $(5, 4, -1)$ são colineares 4

5.º Processo

Referir que o ponto $(3, 0, 1)$ pertence ao plano xOz, pelo facto de ter ordenada nula 2

Referir que o ponto $(4, 2, 0)$ pertence ao plano xOy, pelo facto de ter cota nula 2

Determinar uma condição que defina a recta que contém os pontos $(3, 0, 1)$ e $(4, 2, 0)$..3

Mostrar que essa condição é equivalente à equação
$(x, y, z) = (5, 4, -1) + k\,(1, 2, -1),\ k \in \mathbb{R}$..5

4.2. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{AC}$ 3

Determinar as coordenadas do vector $\overrightarrow{BC}$ 3

Verificar que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ 5

Conclusão 1

2.º Processo

Determinar $\overline{AB}$ 3

Determinar $\overline{AC}$ 3

Determinar $\overline{BC}$ 3

Verificar que $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$ 2

Conclusão 1

4.3. .... **12**

Este exercício pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo

Determinar o raio da superfície esférica, por aplicação do
Teorema de Pitágoras **(ver nota 1)** 8

Escrever uma equação da superfície esférica **(ver nota 2)**.................................... 4

Notas:

1. O examinando deverá complementar a aplicação do Teorema de Pitágoras com:
   - um desenho ou um esquema que mostre de uma forma clara o triângulo em relação ao qual o Teorema de Pitágoras é aplicado (um dos catetos no plano yOz, de comprimento 2, e o outro no plano xOy, de comprimento 3);

   ou

   - uma referência ao facto de o centro da circunferência de intersecção da superfície esférica com o plano xOy ser o ponto $(0,5,0)$.

   Se não fizer nenhuma das coisas, deverá ser penalizado em 2 pontos.

2. Determinam-se a seguir algumas penalizações a atribuir pela escrita incorrecta da condição $x^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2 = 13$.
   - Escrever " $<$ " ou " $\leq$ " em vez de " $=$ ": penalização de 2 pontos.
   - Escrever $\sqrt{13}$ em vez de 13 : penalização de 3 pontos.
   - Escrever $(y+5)^2$ e/ou $(z+2)^2$: penalização de 3 pontos.

2.º Processo

Escrever o sistema $\begin{cases} x^2+(y-5)^2+(z-2)^2=r^2 \\ z=0 \end{cases}$ 2

$\begin{cases} x^2+(y-5)^2+(z-2)^2=r^2 \\ z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y-5)^2=r^2-4 \\ z=0 \end{cases}$ 2

Escrever a equação $r^2-4=9 \quad (3^2)$ 6

Concluir que $r^2=13$ 1

Escrever a equação $x^2+(y-5)^2+(z-2)^2=13$ 1