

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

12º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei nº 286/89, de 29 de Agosto)
Cursos de Carácter Geral e Cursos Tecnológicos

Duração da Prova: 120 minutos
1999

PROVA MODELO

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA

VERSÃO 1

Deve indicar claramente na sua folha de respostas a versão da prova.

A ausência desta indicação implicará a anulação de toda a primeira parte da prova.

Primeira Parte

- As nove questões desta primeira parte são de escolha múltipla.
- Para cada uma delas, são indicadas quatro alternativas.
- Escreva na sua folha de respostas a letra correspondente à alternativa que seleccionar para cada questão.
- Se apresentar mais do que uma resposta, ou se a letra transcrita for ilegível, a questão será anulada.
- Não apresente cálculos.

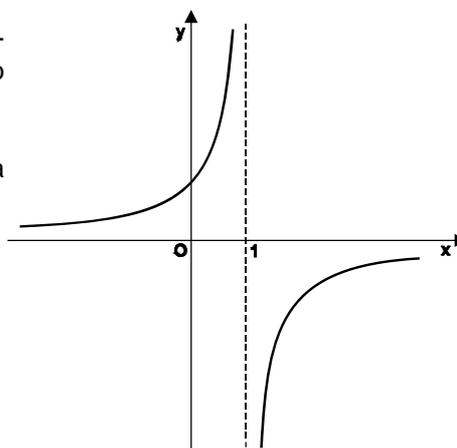
1. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função f , cujo domínio é $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

A recta de equação $x = 1$ é uma assíntota vertical do gráfico de f .

Considere a sucessão de termo geral

$$x_n = 1 + \frac{1}{n}$$

Seja $u_n = f(x_n)$



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\lim u_n = -\infty$

(B) $\lim u_n = +\infty$

(C) $\lim u_n = 1$

(D) Não existe $\lim u_n$

2. Seja $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = \log_2(2 \cdot \sqrt[3]{x})$

Indique qual das expressões seguintes também pode definir a função g .

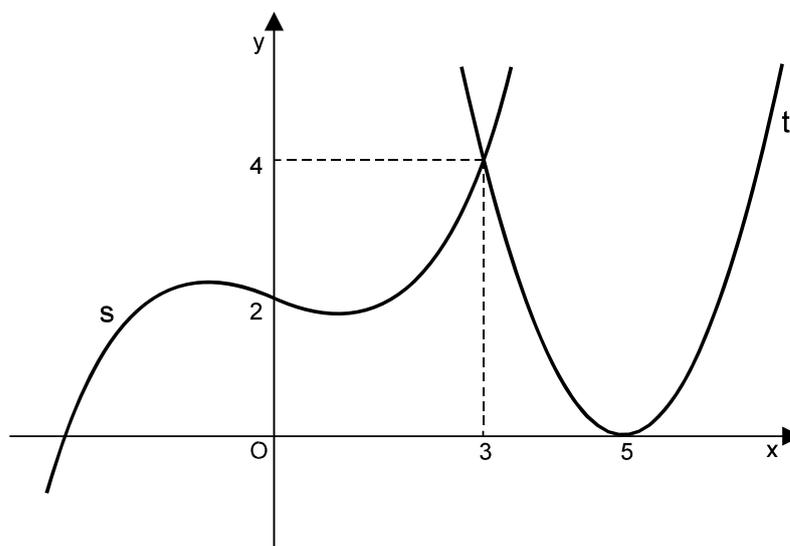
(A) $2 + \log_2(\sqrt[3]{x})$

(B) $2 \log_2(\sqrt[3]{x})$

(C) $\frac{3 + \log_2 x}{3}$

(D) $\frac{1 + \log_2 x}{2}$

3. Na figura estão representadas graficamente as funções s e t .



Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- (A) A função t não tem zeros
(B) 2 é um zero da função s
(C) 5 é um zero da função $\frac{s}{t}$
(D) 3 é um zero da função $s - t$

4. De uma função h , **contínua** em \mathbb{R} , sabe-se que:

- $h(-2) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
- A recta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico de h
- h é estritamente crescente no intervalo $] -\infty, -2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-2, +\infty[$

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- (A) A função h tem dois zeros
(B) O contradomínio de h é $] -\infty, 3]$
(C) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$
(D) $h(0) < -4$

5. Num referencial o. n. xOy , considere as elipses definidas pelas equações:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

As duas elipses têm

- (A) o mesmo centro. (B) os mesmos focos.
 (C) os mesmos vértices. (D) a mesma excentricidade.
6. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere o plano α , de equação $x + y = 4$
 O plano α é
 (A) paralelo ao plano xOy (B) perpendicular ao plano xOy
 (C) paralelo ao eixo Ox (D) perpendicular ao eixo Ox

7. Num referencial o. n. $Oxyz$, considere:
- a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
 - o plano de equação $z = 4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

- (A) π (B) 3π (C) 6π (D) 9π

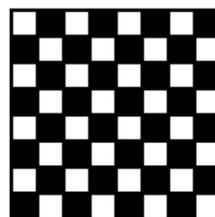
8. Considere duas linhas consecutivas do triângulo de Pascal, das quais se reproduzem alguns elementos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & & 36 & & a & & 126 & & \dots \\ & & & & & & & & \\ & & \dots & & 120 & & b & & \dots \end{array}$$

Indique o valor de b .

- (A) 164 (B) 198 (C) 210 (D) 234

9. Admita que tem à sua frente um tabuleiro de xadrez, no qual pretende colocar os dois cavalos brancos, de tal modo que fiquem na mesma fila horizontal. De quantas maneiras diferentes pode colocar os dois cavalos no tabuleiro, respeitando a condição indicada?



- (A) $8 \times {}^8C_2$ (B) ${}^{64}C_2$ (C) $\frac{{}^{64}C_2}{8}$ (D) 8A_2

Segunda Parte

Nas questões desta segunda parte apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \sin(x) - \frac{1}{2} \sin(2x)$

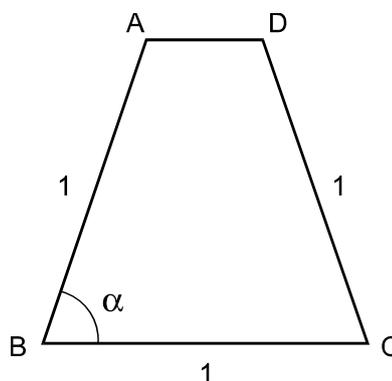
1.1. Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(0)$.

1.2. $[ABCD]$ é um trapézio isósceles; os lados $[AD]$ e $[BC]$ são paralelos.

Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \leq 1$

Seja α a amplitude do ângulo ABC ($\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$).



1.2.1. Mostre que, para cada $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$, a área do trapézio é igual a $f(\alpha)$.

1.2.2. Determine $f(\frac{\pi}{2})$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para $\alpha = \frac{\pi}{2}$

2. Foi administrado um medicamento a um doente às 9 horas da manhã de um certo dia. A concentração desse medicamento, em miligrama por mililitro de sangue, t horas após ter sido administrado, é dada por

$$C(t) = 2te^{-0,3t}$$

2.1. Utilize o Teorema de Bolzano para mostrar que houve um instante, entre as 9 h 30 min e as 10 h, em que a concentração do medicamento foi de 1 mg/ml.

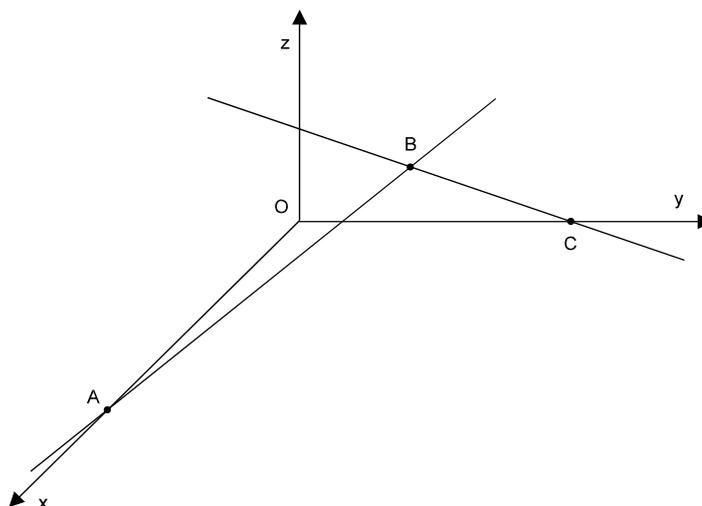
2.2. Recorrendo à derivada da função C , determine o instante em que a concentração de medicamento no sangue do doente foi máxima. Apresente o resultado em horas e minutos.

3. Lança-se três vezes um dado equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6. Indique, justificando, qual dos dois acontecimentos seguintes é mais provável:

- *nunca sair o número 6;*
- *saírem números todos diferentes.*

4. Considere, num referencial o. n. $Oxyz$:

- o ponto $A(10, 0, 0)$
- o ponto $B(0, 2, 1)$
- o ponto $C(0, 5, 0)$
- a recta AB
- a recta BC



4.1. Justifique que as rectas AB e BC são coplanares e mostre que o plano α por elas definido admite como equação $x + 2y + 6z = 10$.

4.2. Determine uma equação vectorial da recta de intersecção do plano α com o plano xOz .

4.3. Calcule o volume da pirâmide $[OBCA]$.

Formulário

$$\sin(2x) = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \quad \cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \operatorname{tg}(2x) = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\text{Volume da Pirâmide} = \frac{1}{3} \times \text{Área da Base} \times \text{Altura}$$

FIM

COTAÇÕES

Primeira Parte..... 81

| | |
|--|-----|
| Cada resposta certa | +9 |
| Cada resposta errada..... | - 3 |
| Cada questão não respondida ou anulada | 0 |

Nota: Um total negativo nesta parte da prova vale 0 (zero) pontos.

Segunda Parte 119

| | |
|-------------|----|
| 1. | 38 |
| 1.1. | 12 |
| 1.2. | 26 |
| 1.2.1. | 15 |
| 1.2.2. | 11 |

| | |
|-----------|----|
| 2. | 25 |
| 2.1. | 10 |
| 2.2. | 15 |

3. 20

| | |
|-----------|----|
| 4. | 36 |
| 4.1. | 12 |
| 4.2. | 12 |
| 4.3. | 12 |

TOTAL200