EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

11.º Ano de Escolaridade (Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março)

Curso Científico-Humanístico
de Artes Visuais

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**
2006

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA - B

Identifique claramente os grupos e os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 10.

A prova inclui um formulário (pág. 11).

Em todas as questões da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar de forma inequívoca a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. A turma da Isabel decidiu fazer arranjos florais, utilizando flores do horto da escola, para vender no Dia dos Namorados.

Idealizaram arranjos formados por margaridas, rosas e violetas.

Dispõem de: 192 margaridas, 88 rosas e 112 violetas.

Pensaram formar dois tipos de arranjos: A e B.

Cada arranjo do tipo A:

- será composto por 16 margaridas, 4 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 3 euros.

Cada arranjo do tipo B:

- será composto por 8 margaridas, 8 rosas e 8 violetas;
- dará um lucro de 2 euros.

1.1. A Isabel sugeriu que se fizessem 7 arranjos de cada tipo.
O Dinis sugeriu que se fizessem 10 arranjos do tipo A e 5 do tipo B.
Averigúe se cada uma destas propostas é, ou não, viável, tendo em conta as flores disponíveis.

1.2. Determine o número de arranjos de cada tipo que os alunos devem produzir, para obterem o maior lucro possível (admitindo que vendem todos os arranjos).

2. Numa festa de aldeia, foi montado um palco para a realização de um espectáculo.
Em frente deste, colocou-se uma plateia, com um total de 465 cadeiras, dispostas em filas.
Em cada fila, as cadeiras foram encostadas umas às outras, sem intervalos entre elas.
A primeira fila tem 10 cadeiras e a última fila tem 52 cadeiras.
A segunda fila tem mais k cadeiras do que a primeira. A terceira fila tem também mais k cadeiras do que a segunda, e assim sucessivamente. Cada fila tem, portanto, mais k cadeiras do que a anterior.

2.1. Mostre que a plateia tem 15 filas.

2.2. Determine o valor de k.

2.3. A organização do espectáculo decidiu distribuir, ao acaso, os 465 bilhetes para os lugares sentados. A Nazaré recebeu um bilhete. Ela sabe que, em cada fila, os dois lugares situados nas extremidades (um em cada ponta) têm má visibilidade para o palco, pelo que gostaria que não lhe calhasse um lugar desses.
Qual é a probabilidade de a Nazaré ver satisfeita a sua pretensão? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

3. A Margarida, aluna do curso de Artes Visuais, pretende fazer uma composição artística num pedaço de tecido. Para isso, começou por entornar um frasco de tinta azul no tecido.
Admita que a mancha produzida pela tinta sobre o tecido é um círculo cujo raio vai aumentando com o decorrer do tempo.
Sabe-se que, t segundos após o frasco ter sido completamente entornado, a **área** (em cm^2) de tecido ocupada pela mancha é dada, para um certo valor de k, por

$$A(t) = \frac{100}{1+4\,e^{kt}}\ , \quad \text{sendo} \quad t \geq 0$$

3.1. Supondo que, ao fim de cinco segundos, o raio da mancha circular é de $4\ cm$, determine o valor de k. Apresente o resultado arredondado às centésimas.

3.2. Admita agora que $k = -0{,}25$.
Calcule a taxa de variação média da função A no intervalo $[0, 4]$, apresentando o resultado arredondado às unidades.
Interprete o valor obtido, no contexto do problema.

4. Para analisar o som produzido pela vibração de um diapasão, recolheram-se alguns dados com um sensor ligado a uma calculadora gráfica.
O sensor mede a variação de uma certa grandeza (que designaremos por y), ao longo do tempo (que designaremos por x).
A partir dos dados, recolhidos em intervalos de tempo iguais, obteve-se, na calculadora, o diagrama de dispersão que se pode observar nas figuras 1 e 2 (o eixo das abcissas corresponde à variável x e o das ordenadas à variável y).

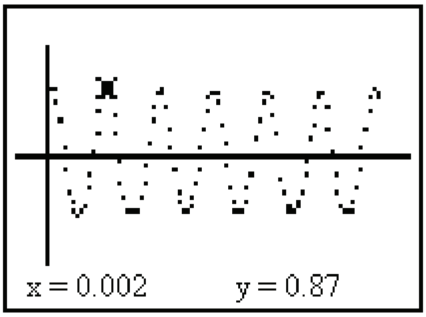


Figura 1

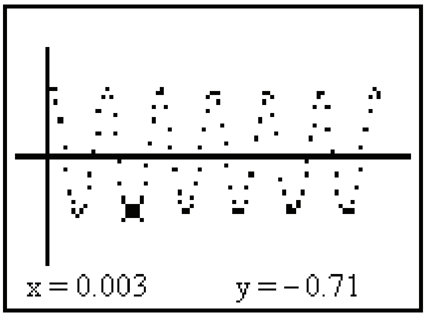


Figura 2

Em cada uma das figuras, está representada a posição do cursor no visor da calculadora.
Na figura 1, o cursor encontra-se num ponto cuja ordenada é o máximo de y.
Na figura 2, o cursor encontra-se num ponto cuja ordenada é o mínimo de y.

Admita que o fenómeno é bem modelado por uma função definida por uma expressão do tipo $y = a + b\cos(c\,x)$, onde a, b e c são constantes reais positivas.

4.1. Relativamente a qualquer função definida por uma expressão do tipo indicado, justifique que:

4.1.1. O contradomínio é o intervalo $[\,a-b,\ a+b\,]$

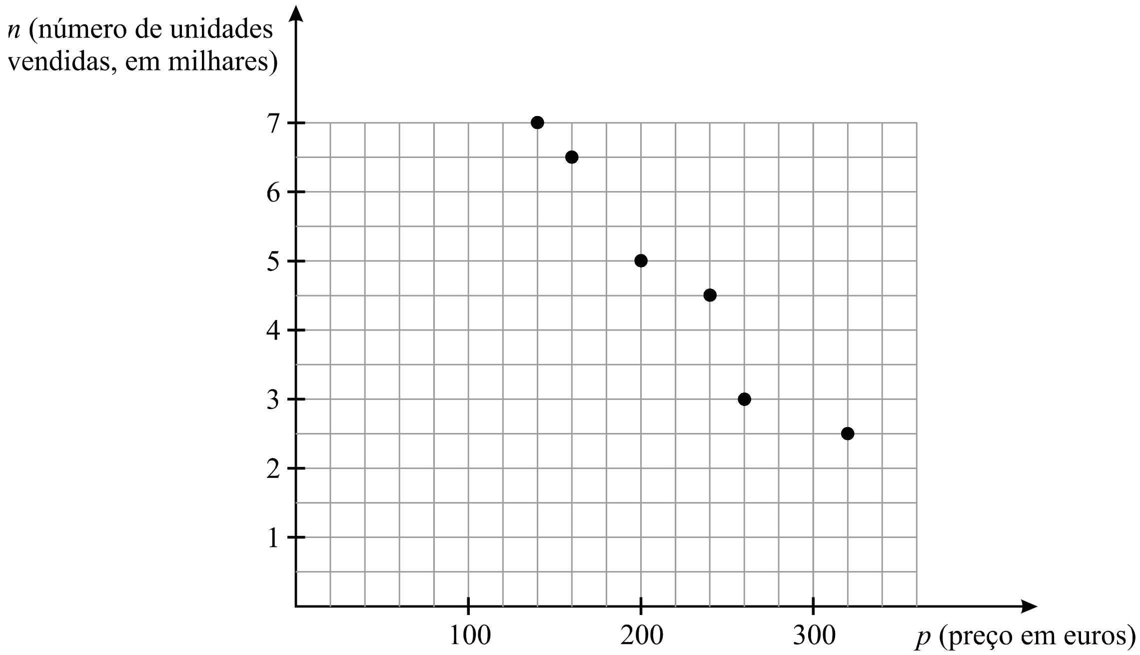
4.1.2. $\dfrac{2\pi}{c}$ é período da função.

4.2. Determine os valores dos parâmetros a, b e c, tendo em conta:

- os dados contidos nas figuras 1 e 2
- a alínea 4.1.1.
- a alínea 4.1.2. e o facto de não existir nenhum período positivo inferior a $\dfrac{2\pi}{c}$

Apresente o valor de c arredondado às unidades.

5. A empresa de telecomunicações *TLV* efectuou um estudo estatístico relativo a todos os modelos de telemóveis já vendidos pela empresa.
Este estudo revelou que o número n, em **milhares**, de unidades vendidas, depende do preço p (em euros) de cada telemóvel, de acordo com o seguinte diagrama de dispersão.



5.1. Admita que a empresa possui um ficheiro com os nomes de todos os clientes e, para cada um deles, o preço do telemóvel adquirido (cada cliente adquiriu apenas um telemóvel). Para assinalar o seu aniversário, a *TLV* resolveu sortear uma viagem entre os seus clientes.
Qual é a probabilidade de a viagem sair a um cliente que tenha comprado um telemóvel por um preço inferior a 180 euros? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

5.2. **Recorrendo à sua calculadora**, determine o coeficiente de correlação linear entre as variáveis p e n. Apresente o valor pedido arredondado às centésimas. Explique como procedeu, reproduzindo na sua folha de prova as listas que introduziu na calculadora.
Tendo em conta o diagrama de dispersão apresentado na figura acima, interprete o valor obtido.

5.3. A *TLV* vai lançar um novo modelo de telemóvel. Com base no estudo efectuado, bem como noutros indicadores, esta empresa prevê, relativamente ao modelo que vai ser lançado, que a relação entre n (número, em **milhares**, de telemóveis que serão vendidos) e p (preço de cada telemóvel do novo modelo) estará de acordo com a expressão

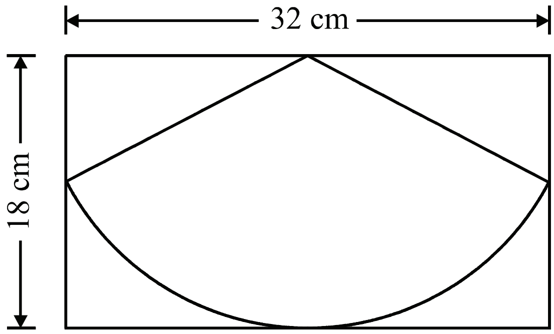
$$n = -0{,}03\,p + 10$$

Seja q a quantia (em euros) que a empresa prevê vir a receber pela venda dos telemóveis do novo modelo.
Escreva uma expressão que dê a quantia q, em função do preço p de cada telemóvel. Apresente essa expressão na forma de um polinómio reduzido.

6. Pretende-se construir um filtro de forma cónica, com uma capacidade superior a meio litro.

Para o efeito, dispõe-se de uma folha de papel de filtro, de forma rectangular, de 32 cm de comprimento e 18 cm de largura.

Na figura, está representado um esquema de uma possível planificação do filtro. Como se pode observar, essa planificação é um sector circular, de raio igual à largura da folha de papel.

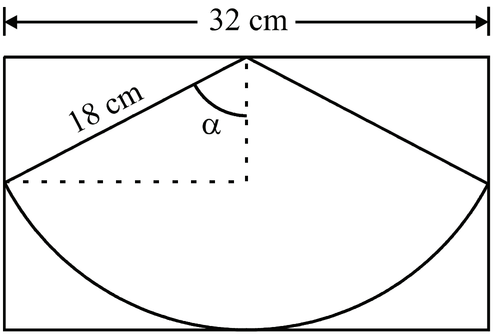


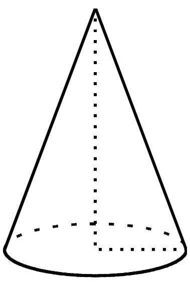
Averigúe se o filtro construído de acordo com esta planificação tem, ou não, uma capacidade superior a meio litro.

Nota: sempre que, nos cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Percorra sucessivamente as seguintes etapas:

- *Determine a amplitude, em radianos, do ângulo α, representado na figura junta.*
- *Determine o perímetro da base do cone.*
- *Determine o raio da base do cone.*
- *Determine a altura do cone.*
- *Determine o volume do cone e responda à questão colocada. (recorde que $1\, litro = 1000\, cm^3$)*





FIM

COTAÇÕES

1. .... **30**

- **1.1.** 10
- **1.2.** 20

2. .... **30**

- **2.1.** 10
- **2.2.** 10
- **2.3.** 10

3. .... **30**

- **3.1.** 15
- **3.2.** 15

4. .... **45**

- **4.1.** 30
  - **4.1.1.** 15
  - **4.1.2.** 15
- **4.2.** 15

5. .... **35**

- **5.1.** 10
- **5.2.** 10
- **5.3.** 15

6. .... **30**

TOTAL **200**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ *– raio da base*; g *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ *– raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r$ *– raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$