EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004,de 26 de Março

Duração da prova: 150 minutos **1.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 10.

A prova inclui um formulário (página 11).

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

1. Dispõe-se de dois dados perfeitos, um tetraedro e um cubo, com faces numeradas de 1 a 4 e de 1 a 6, respectivamente.
Considere a experiência aleatória que consiste em lançar, simultaneamente, os dois dados e registar a soma do número da face que fica voltada para baixo, no caso do tetraedro, com o número da face que fica voltada para cima, no caso do cubo.

1.1. Construa o modelo de probabilidades associado à experiência aleatória considerada.
Apresente as probabilidades na forma de fracção.

Nota: Construir um modelo de probabilidades consiste em construir uma tabela, associando aos resultados da experiência aleatória a respectiva probabilidade.

1.2. Com base na experiência aleatória descrita, a Ana e o João decidem fazer um jogo. A Ana lança o tetraedro e o João lança o cubo. A Ana sugere que as regras do jogo consistam no seguinte:

- ganha o João se a soma dos números saídos for ímpar;
- ganha a Ana se a soma dos números saídos for par.

Porém, o João diz que as regras não são justas, afirmando que a Ana tem vantagem, uma vez que existem mais somas pares do que ímpares.
Num pequeno texto, comente o argumento do João, referindo se ele tem, ou não, razão.

Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

- uma análise do argumento do João, referindo o número de somas pares e o número de somas ímpares;
- o valor da probabilidade de «sair soma par»;
- o valor da probabilidade de «sair soma ímpar»;
- conclusão final, referindo se o João tem, ou não, razão.

2. Uma autarquia pondera o abastecimento anual de energia eléctrica para iluminação da via pública. Para o efeito, a rede nacional pode fornecer-lhe dois tipos de energia: energia de origem convencional, maioritariamente resultante da combustão de *fuel*, ou, em alternativa, energia eólica.

Para uma cobertura razoável de iluminação, no período nocturno, o consumo anual de energia não poderá ser inferior a $40 \ MWh$.

Por razões ambientais, a autarquia pretende que a quantidade de energia de origem convencional não exceda a quantidade de energia eólica fornecida.

Relativamente à energia de origem convencional, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 80 euros.

Relativamente à energia eólica, tem-se:

- o preço por cada MWh é de 90 euros;
- o fornecimento de energia, nesse ano, não poderá ultrapassar os $40 \ MWh$.

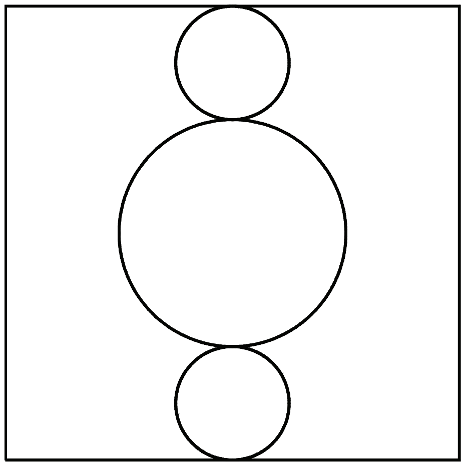
Represente por x a quantidade de energia de origem convencional e por y a quantidade de energia eólica consumidas pela autarquia.

Determine que quantidade de energia de cada tipo deve ser consumida, por ano, de modo que possam ser minimizados os custos, tendo em conta as condicionantes referidas.

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

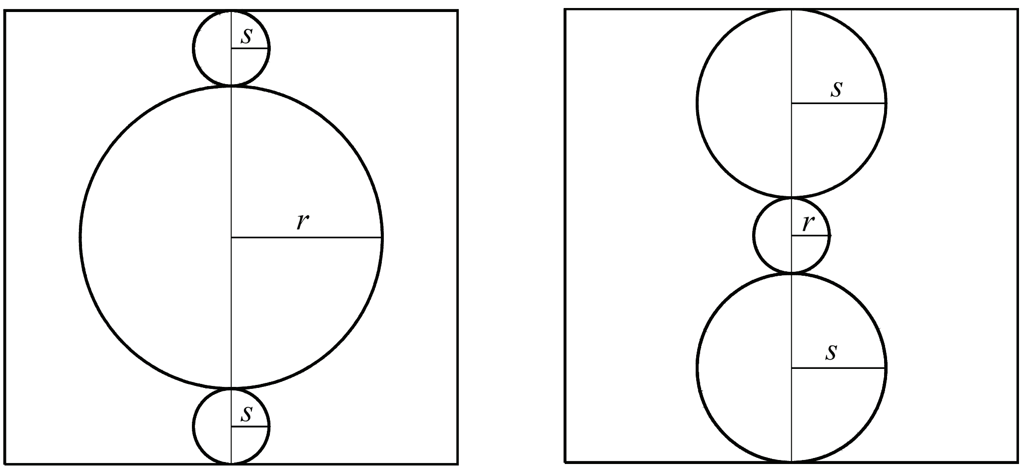
- *indique as restrições do problema;*
- *indique a função objectivo;*
- *represente graficamente a região admissível (referente ao sistema das restrições);*
- *indique os valores de x e y para os quais é mínima a função objectivo.*

3. Pretende-se elaborar um painel publicitário com a forma de um quadrado com 10 metros de lado. O painel deve conter três círculos luminosos, tangentes entre si, como mostra a figura.



Relativamente ao painel, considere que:

- os diâmetros dos três círculos variam permanentemente e os seus centros estão sempre na mesma mediana do quadrado;
- os círculos nunca saem fora do quadrado;
- os círculos inferior e superior são geometricamente iguais e são tangentes a lados opostos do quadrado;
- quando os diâmetros dos círculos inferior e superior aumentam, diminui o diâmetro do círculo central, e vice-versa, como sugere a figura seguinte.



Sejam s o raio dos círculos inferior e superior e r o raio do círculo central.

3.1. Mostre que $s = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}r$

3.2. Verifique que a soma, A, das áreas dos três círculos, em função de r, é dada por:

$$A(r) = \frac{3}{2}\,\pi\, r^2 - 5\,\pi\, r + \frac{25}{2}\,\pi\ , \quad 0 < r < 5$$

4. O Pedro foi juntando algumas economias e, neste momento, tem 1000 euros que decide colocar no banco, constituindo uma poupança.
Para o efeito dispõe de duas opções:

Opção A:
Por cada ano de aplicação do capital, o Pedro recebe 40 euros de juros.

Opção B:
Por cada ano de aplicação do capital, o Pedro recebe juros à taxa anual de $3{,}5$%, a incidir sobre o capital total acumulado até à data.

4.1. Relativamente à opção **B**, designe por (b_n) a sucessão cujos termos são os valores do capital existente decorridos n anos.
Sabendo que (b_n) é uma progressão geométrica, determine a razão.
Justifique a sua resposta.

4.2. Comente a seguinte afirmação:
«Comparando as duas opções apresentadas, se nos primeiros anos a opção **A** é a melhor escolha, a partir de certa altura a opção **B** torna-se mais vantajosa.»

Sugestão: Determine o ano a partir do qual o capital acumulado de acordo com a opção **B** é superior ao capital acumulado caso se tivesse escolhido a opção **A**.
Poderá ser útil ter em atenção que $b_n = 1000 \times 1{,}035^n$

5. Sabe-se que a concentração, C, em miligramas por litro, de um analgésico, na circulação sanguínea, t horas após a sua ingestão, é dada por:

$$C(t) = 10\left(e^{-t} - e^{-2t}\right)$$

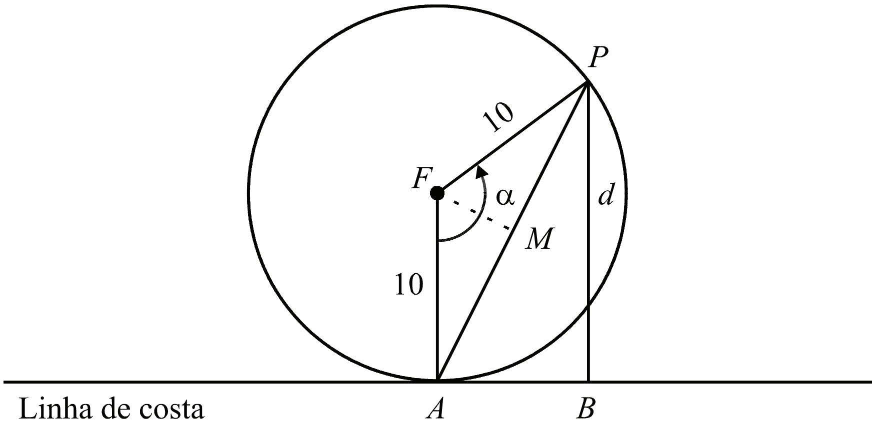
Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

5.1. Qual é a concentração, aproximada, do analgésico uma hora e trinta minutos após a sua ingestão?
Apresente o resultado arredondado às centésimas.

5.2. Sabe-se que o analgésico tem o efeito desejado quando a sua concentração é superior a $0{,}5$ miligramas por litro.
Considere que o analgésico foi ingerido às nove horas.
Recorrendo às potencialidades da calculadora gráfica, indique uma aproximação do intervalo em que ele produz o efeito desejado.
Apresente os resultados em horas e minutos (com os minutos arredondados às unidades).

6. Um farol (ponto F), situado numa ilha, encontra-se a $10\,km$ da costa. Nesta, sobre a perpendicular tirada do farol, está um observador (ponto A).

A luz do farol descreve sucessivos círculos e tem um alcance de $10\,km$. Em cada instante, o farol ilumina segundo uma trajectória rectilínea, com extremidade num ponto P, que percorre a circunferência representada na figura seguinte.



Sejam:

- α a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{F}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{F}P$
- M o ponto médio de $[AP]$
- $\overline{PB}$ a distância do ponto P à costa

Mostre que, para $0^{o} < \alpha < 180^{o}$:

6.1. a distância, $\overline{AP}$, expressa em quilómetros, do observador ao ponto P é dada, em função de α, por

$$\overline{AP} = 20\,sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

6.2. a distância, d, expressa em quilómetros, do ponto P à costa é dada, em função de α, por

$$d(\alpha) = 20\,sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- *escreva $F\hat{A}P$, em função de α*
- *escreva $P\hat{A}B$, em função de α*
- *escreva $\overline{BP}$, em função de α*

FIM

COTAÇÕES

1. .... **30 pontos**

1.1. ....14 pontos

1.2. ....16 pontos

2. .... **22 pontos**

3. .... **41 pontos**

3.1. .... 19 pontos

3.2. ....22 pontos

4. .... **25 pontos**

4.1. .... 10 pontos

4.2. ....15 pontos

5. .... **41 pontos**

5.1..19 pontos

5.2. ....22 pontos

6. .... **41 pontos**

6.1. ....19 pontos

6.2. ....22 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\frac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\frac{\alpha\, r^2}{2}$ $(\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r *– raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ *– raio da base*; g *– geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ *– raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $(r$ *– raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$