ASSOCIAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DA PROVA
MATEMÁTICA B (735 – 21 de Junho)

1.1.
No lançamento dos dois dados os resultados para a soma são os constantes na tabela seguinte:

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10

Sendo o número de casos possíveis de 24 a distribuição de probabilidade de acordo com a tabela anterior é:

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{4}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{1}{24}$

1.2.
Na tabela elaborada na alínea anterior existem 24 somas possíveis, das quais 12 são pares e 12 são ímpares.
Pela distribuição de probabilidade temos que o valor da probabilidade de sair "soma par" é:

P("soma par")=P(2)+P(4)+P(6)+P(8)+P(10)=$\frac{1}{24}+\frac{3}{24}+\frac{4}{24}+\frac{3}{24}+\frac{1}{24}=\frac{1}{2}$.

P("soma ímpar")=1-P("soma par")=$1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

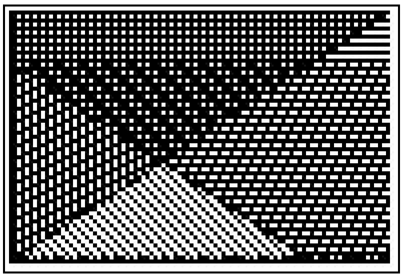
Assim, o João não tem razão visto as somas pares e as somas ímpares serem equiprováveis.

2.

Sejam então:
x energia convencional ao preço de 80 euros.
y energia eólica ao preço de 90 euros.

Como o consumo da energia convencional não pode exceder o da eólica uma das condições é:
$y \geq x$
Os consumos são valores não negativos logo,
$x \geq 0$
$y \geq 0$
Como o total do consumo não pode ser inferior ao 40 MWh temos como condição:

$x + y \geq 40$
Atendendo a que o consumo da energia eólica não pode ultrapassar os 40MWh ainda temos:
$y \leq 40$
O custo será dado por 80x+90y valor que queremos minimizado
Inserindo no editor de funções as condições obtemos o seguinte gráfico na janela de visualização [0,50]x[0,50]:



O triângulo da figura com a trama  é a região admissível.
Os vértices da região admissível são: (0,40); (20,20) e (40,40)
Estes pontos são aqueles onde é possível que a função objectivo atinja um valor mínimo.
A função é mínima em (20,20) isto é: 80x20+90x20=1710 pois em (0,40) vale: 80x0+90x40=3600 e em (40,40) vale: 80x40+90x40=6800

3.1.
Sendo s o raio de cada circunferência tangente aos lados do quadrado o seu diâmetro é 2s e o diâmetro da circunferência que está no meio é 2r. A soma destes diâmetros tem de ser igual a 10, lado do quadrado, pelo que:

$$2s + 2s + 2r = 10 \Leftrightarrow 2s + r = 5 \Leftrightarrow s = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}r$$

3.2.
Área do círculo superior é $\pi\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}r\right)^2$
Área dos círculos superior e inferior é

$$2\pi\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{2}r\right)^2 = 2\pi\left(\frac{25}{4} - \frac{5}{2}r + \frac{1}{4}r^2\right) = \frac{25}{2} - 5\pi r + \frac{\pi r^2}{2}$$

Área do círculo central: πr^2
Área dos três círculos: $\frac{25}{2} - 5\pi r + \frac{\pi r^2}{2} + \pi r^2 = \frac{25}{2} - 5\pi r + \frac{3\pi r^2}{2}$
Aqui o raio (r) da circunferência central não pode superior a 5 senão o diâmetro era maior que o lado do quadrado, e deve ser maior que 0 de modo a garantir a existência de 3 círculos.

4.1.

Sendo o valor inicial de 1000, no final do 1º ano terá 1000+1000 x 0,035=1035
No final do 2º ano terá 1035+1035 x 0,035=1071,225
Ou seja, $b_1 = 1035 \; e \; b_2 = 1071{,}225$
Como é afirmado que a sucessão é uma progressão geométrica o quociente de dois termos consecutivos é igual à razão da progressão.
Assim a razão será dada por $\frac{b_2}{b_1} = \frac{1071{,}225}{1035} = 1{,}035$

4.2. Seja a_n a sucessão associada à opção A. A sucessão é uma progressão aritmética de razão 40 em que o 1º termo é igual a 1040.
$a_n = 1040 + (n-1) \times 40 \Leftrightarrow a_n = 1000 + 40n$
Como b_n é uma progressão geométrica de razão 1,035 e 1º termo 1035 temos que:
$b_n = 1035 \times 1{,}035^{n-1} \Leftrightarrow b_n = 1000 \times 1{,}035^n$
Usando a calculadora inserimos:
$y_1 = 1000 \times 40n$
$y_2 = 1000 \times 1{,}035^n$
Consultando a tabela da qual se apresenta um excerto:

X	Y1	Y2
5	1200	1187.7
6	1240	1229.3
7	1280	1272.3
8	1320	1316.8
9	1360	1362.9
10	1400	1410.6
11	1440	1460

X=11

podemos concluir que a partir do 8ºano a opção B é mais vantajosa e que até ao 8º ano inclusive a opção A é a mais vantajosa.

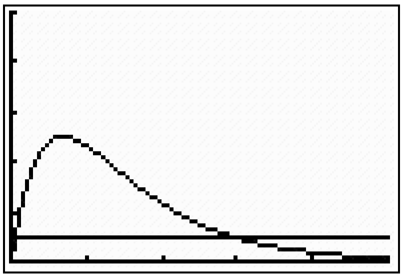
5. 1.
Sabendo que um hora e tinta minutos é 1,5h temos:

$C(1{,}5) = 10\left(e^{-1{,}5} - e^{-3}\right) = 1{,}73343\ldots$

A concentração é, aproximadamente, de 1,73 miligramas por litro.

5.2.
Teremos de ver durante quanto tempo é superior a 0,5 miligramas por litro ou seja resolver a inequação:
$10\,(e^{-t} - e^{-2t}) > 0{,}5$

Inserindo no editor de função em Y1 o 1ºmembro da inequação e em Y2 o 2º membro da inequação, obtemos na janela [0,5]x[0,5] o gráfico seguinte:



O resultado vai estar no intervalo entre as duas intersecções. Estas obtêm-se com o comando ‘intersect’ e são:
1ª intersecção (0,05;0,5) e 2ª intersecção (2,94;0,5)

Assim, o medicamento começa a fazer efeito 0,05x60=3 minutos depois de ser tomado e deixa de fazer efeito 2,94h depois de ser tomado ou seja 2h e 56 minutos.
Como foi tomado às 9h00, vai começar a fazer efeito às 9h e 3m e deixa de fazer efeito às 11h e 58m.

6.1.
O $\Delta[FAP]$ é um triângulo isósceles pois $\overline{FA} = \overline{FP}$ pois são raios de uma mesma circunferência.
Sendo M o ponto médio de $[AP]$, então pelo facto do triângulo ser isósceles a altura $[FM]$ bissecta o $\angle AFP$.

Assim, $M\hat{F}P = \frac{\alpha}{2}$.

Sendo $\Delta[FMP]$ um triângulo rectângulo temos:

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{PM}}{\overline{FP}} \Leftrightarrow sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{PM}}{10} \Leftrightarrow \overline{PM} = 10sen\frac{\alpha}{2}.$$

Logo, $\overline{AP} = 2\overline{PM} \Leftrightarrow \overline{AP} = 2\times 10sen\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Leftrightarrow \overline{AP} = 20\times sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

6.2.
Sendo $\Delta[FAP]$ um triângulo isósceles temos $\angle FAP \cong \angle FPA$.

Assim, $F\hat{A}P = \frac{\pi - \alpha}{2}$.

Sabendo que $F\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$, pois $\overline{FA}$ é perpendicular à linha de costa, concluímos:

$$P\hat{A}B = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi - \alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$$

Logo, no triângulo rectângulo $[PBA]$ temos

$$sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AP}} \Leftrightarrow sen\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{BP}}{20sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \Leftrightarrow \overline{BP} = 20sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Portanto, $d(\alpha) = 20sen^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$