EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

10.º/11.º ou 11.º/12º Anos de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Duração da prova: 150 minutos **2.ª FASE**

2007

PROVA ESCRITA DE MATEMÁTICA B

Identifique claramente os itens a que responde.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta (excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações).

É interdito o uso de «esferográfica-lápis» e de corrector.

As cotações da prova encontram-se na página 11.

A prova inclui um formulário (página 12).

Em todos os itens da prova, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Apresente uma única resposta a cada item. Se escrever mais do que uma resposta, deve indicar, de forma inequívoca, a que pretende que seja classificada (riscando todas as que pretende anular).

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

• sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);

• sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;

• sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

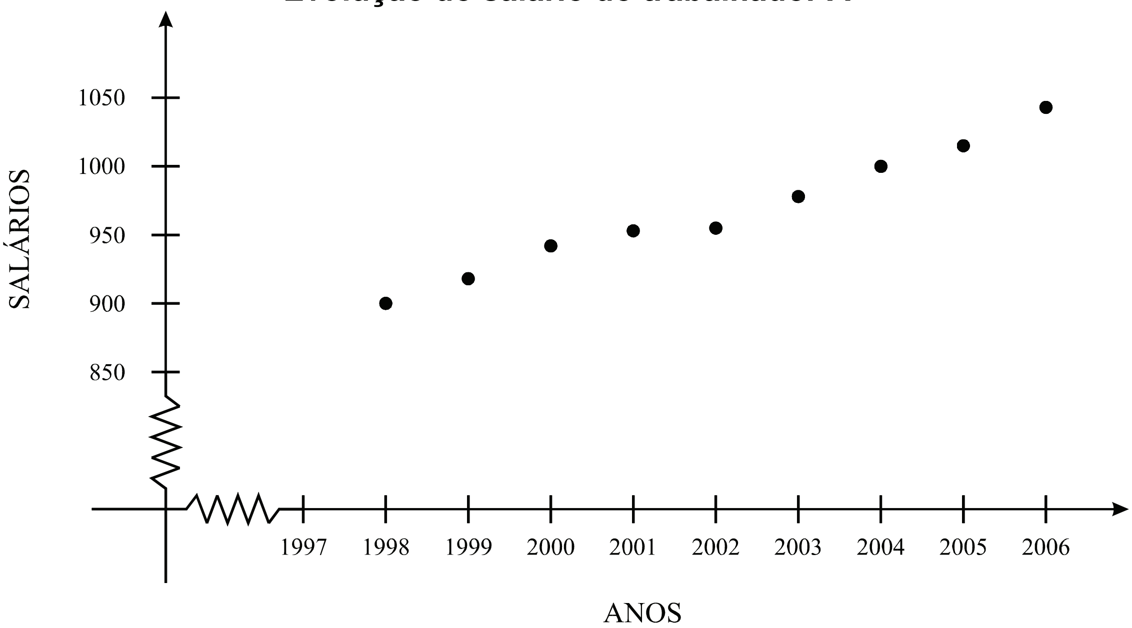
1. A evolução da massa salarial de um conjunto de trabalhadores é, por vezes, explicável através de modelos matemáticos.

Numa dada empresa, fez-se um estudo comparativo da evolução dos vencimentos (em euros) de dois trabalhadores, **A** e **B**, entre 1998 e 2006.

- Relativamente ao trabalhador **A**, o valor do vencimento mensal em cada ano, no período compreendido entre 1998 e 2006, é apresentado na tabela seguinte e reproduzido num diagrama de dispersão.

Anos	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Salário	900	918	942	953	955	978	1000	1015	1043

Evolução do salário do trabalhador A



- Relativamente ao trabalhador **B**, sabe-se que, em 1998, recebia mensalmente 652 euros e que, nos anos seguintes, referentes ao período em estudo, o valor do seu vencimento mensal pode ser obtido através do modelo

$$v_n = 652 \times 1{,}0502^{n-1}$$

Nota: a variável n está associada aos anos relativos ao período em estudo, concretamente, $n = 1$ corresponde a 1998, $n = 2$ corresponde a 1999, etc.

1.1. **Utilizando a sua calculadora**, indique um valor aproximado do coeficiente de correlação linear entre as variáveis descritas na tabela (anos/salário) referente ao trabalhador **A**. Apresente o resultado com duas casas decimais.

Interprete esse valor, tendo em conta o diagrama de dispersão correspondente.

1.2. Tome em atenção que o modelo que traduz a evolução do salário do trabalhador **B** é uma progressão geométrica.

1.2.1. Indique o primeiro termo e a razão da progressão geométrica em questão.

1.2.2. Um trabalhador aufere, por ano, 12 ordenados mensais mais o subsídio de férias e o décimo terceiro mês, ambos com valor igual ao do ordenado mensal.

Utilizando a fórmula apropriada (que faz parte do formulário), calcule, aproximadamente, o valor da totalidade dos vencimentos auferidos pelo trabalhador **B** entre 1998 e 2006, inclusive.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. O campo de futebol de um dado clube tem uma bancada destinada a não sócios, que leva $4\,000$ espectadores. Se o preço de cada bilhete for 10 euros, prevê-se que a lotação dessa bancada fique esgotada.
Com base em experiências anteriores, verifica-se que, se o preço de cada bilhete for aumentado numa certa percentagem, x, sobre o valor base (10 euros), o número de espectadores baixa metade dessa percentagem. Por exemplo, se o preço dos bilhetes aumentar 10% , $x = 0{,}1$, o número de espectadores sofre um decréscimo de 5%.

Admitindo a exactidão do modelo descrito e considerando sempre o aumento percentual, x, sobre o preço base (10 euros), responda às questões que se seguem.

2.1. Mostre que, se x for o aumento percentual do preço de cada bilhete para aquela bancada, num dado jogo, então a receita de bilheteira, R, é dada por:

$$R(x) = -20\,000\,x^2 + 20\,000\,x + 40\,000 \text{ , com } 0 \leq x \leq 2$$

Tenha em atenção que:

- *o preço de cada bilhete, p, em função do aumento percentual, x, é dado por $p(x) = 10\,(1 + x)$*
- *o número de espectadores, n, em função do aumento percentual, x, é dado por $n(x) = 4\,000 - 2\,000\,x$*

2.2. Um dos elementos da direcção do clube sugere que o preço de cada bilhete seja de 20 euros, para serem maximizadas as receitas de bilheteira. Porém, um segundo elemento da direcção opõe-se, dizendo que o ideal é manter o preço de cada bilhete a 10 euros, uma vez que as receitas de bilheteira são superiores se assim for.

Num pequeno texto, comente o argumento de cada um dos elementos da direcção do clube, tendo em conta o objectivo de maximizar as receitas de bilheteira.

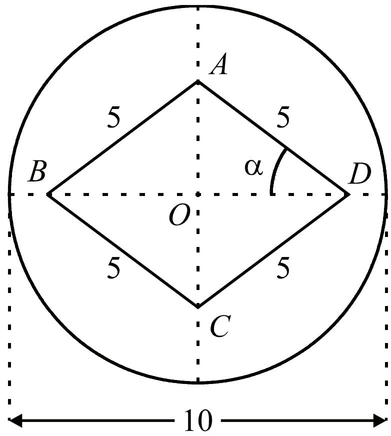
Deve incluir, obrigatoriamente, na sua resposta:

- o valor da percentagem, x, que a direcção do clube deve aplicar sobre o preço base (10 euros), para que se maximizem as receitas de bilheteira, e o respectivo valor da receita (no caso de discordar da opinião de cada um dos elementos da direcção);
- um argumento, fundamentado, referente às propostas de cada um dos elementos da direcção, dizendo se concorda, ou não, com elas;
- todos os elementos recolhidos na utilização da sua calculadora gráfica que se tenham mostrado relevantes.

2.3. À entrada para o recinto do jogo, cada espectador, sócio ou não sócio, recebeu um cartão numerado para se habilitar a um sorteio. Estavam presentes 6825 espectadores, dos quais 40% eram não sócios. Foram sorteados, simultaneamente, dois números. Qual a probabilidade de ambos os contemplados serem sócios?

Apresente o resultado final com aproximação às centésimas.

3. Numa determinada localidade, o responsável pelo planeamento urbanístico apresentou uma proposta para a construção de uma rotunda com 10 metros de diâmetro. No centro da rotunda, pretende-se construir um jardim em forma de losango, com 20 metros de perímetro, como sugere a figura. À volta do jardim, serão colocados calçada e outros elementos decorativos.



Relativamente à figura, considere que:

- os pontos A, B, C e D são os vértices do losango;
- o ponto O é o centro da circunferência;
- o ângulo ADO tem de amplitude α, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

3.1. Mostre que a área, em m^2, da zona destinada ao jardim é dada, em função de α, por:

$$A(\alpha) = 50\, cos\, \alpha \,.\, sen\, \alpha \ , \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

3.2. Determine $A\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Interprete geometricamente o resultado obtido, indicando qual a forma particular do losango, para $\alpha = \frac{\pi}{4}$

4. No período de testes que antecedeu a entrada em funcionamento de um gasómetro, com capacidade de 100 toneladas, procedeu-se ao seu enchimento, continuamente, durante 24 horas.

Por razões de segurança, o gasómetro foi lastrado com $2{,}5$ toneladas de gás, após o que se iniciou a operação de enchimento. A partir daí, o seu enchimento foi feito de acordo com o modelo:

$$M(t) = \frac{100}{1+39\,e^{-0{,}49t}}\text{, sendo } 0 \leq t \leq 24$$

(M representa a massa total, expressa em toneladas, existente no gasómetro t horas desde o início do seu enchimento.)

Nota: Na resolução das questões seguintes, sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

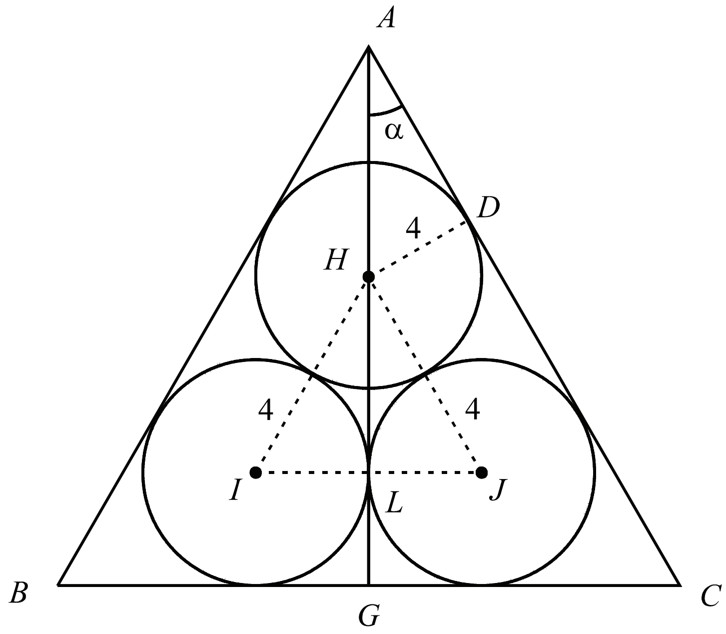
4.1. Qual era a massa total, aproximada, existente no gasómetro 3 horas após o início do seu enchimento?

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

4.2. Durante o período em que decorre o enchimento do gasómetro, fará sentido afirmar que existe um dado intervalo de tempo em que a taxa de variação média do modelo assume um valor negativo?

Justifique devidamente a sua resposta.

5. Para vedar três canteiros circulares, com 4 metros de raio cada, um agricultor decidiu colocar uma rede em forma de triângulo equilátero, $[ABC]$, como a figura sugere.



Relativamente à figura, considere que:

- as circunferências são tangentes entre si;
- os lados do triângulo são tangentes às circunferências;
- os pontos H, I e J são os centros das circunferências;
- G é o ponto médio de $[BC]$;
- D é ponto do lado $[AC]$ tangente à circunferência de centro H;
- L é ponto de tangência das circunferências de centros I e J, respectivamente;
- α é a amplitude do ângulo DAH.

Quantos metros da rede mencionada necessita, aproximadamente, o agricultor para vedar os três canteiros?

Apresente o resultado final arredondado às unidades.

Nota: Sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Sugere-se que:

- *determine a altura do triângulo* $[HIJ]$;
- *determine a altura do triângulo* $[ABC]$;
- *determine o lado do triângulo* $[ABC]$.

FIM

COTAÇÕES

1. .... **32 pontos**

1.1 ....12 pontos

1.2. ....20 pontos

1.2.1. .... 8 pontos

1.2.2. .... 12 pontos

2. .... **60 pontos**

2.1. ....16 pontos

2.2. ....24 pontos

2.3. ....20 pontos

3. .... **44 pontos**

3.1. .... 22 pontos

3.2. ....22 pontos

4. .... **40 pontos**

4.1. .... 18 pontos

4.2. ....22 pontos

5. .... **24 pontos**

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ $\;(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\, maior \times Diagonal\, menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\, maior + Base\, menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ $\;(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
$(r$ – *raio da base*; g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$
$(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ $\quad (r$ – *raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Prog. Aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Prog. Geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$