Ministério da Educação
GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática B

10.º/11.º anos ou 11.º/12.º anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase 8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

As cotações dos itens encontram-se na página 7.

A prova inclui um Formulário na página 8.

1. Pretende-se fazer um canteiro, no jardim de uma escola, com a forma de um quadrado de 7 metros de lado.

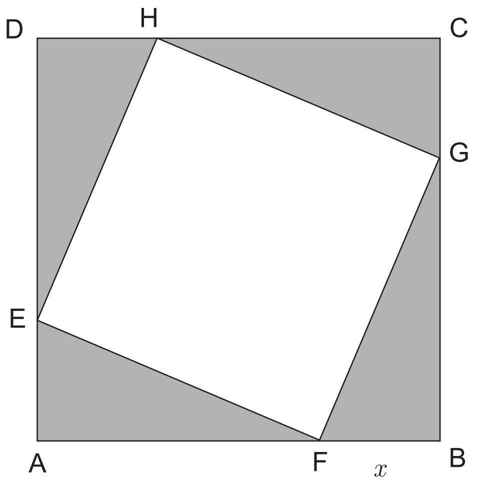

Fig. 1

A figura 1 representa um projecto desse canteiro, designado por $[ABCD]$, em que a região sombreada representa a zona que se pretende relvar, e o quadrado $[EFGH]$ representa o local destinado a plantar roseiras.

Tem-se, em **metros**:

$$\overline{AE} = \overline{FB} = \overline{GC} = \overline{HD} = x$$

1.1. Admita que $x = 3$. Pretende-se plantar 700 roseiras na zona reservada para esse efeito. Cada roseira necessita de uma área quadrangular com 20 **centímetros** de lado.

Será possível plantar as 700 roseiras nessa zona? Justifique.

1.2. Mostre que a área, a, da região relvada, em metros quadrados, é dada, em função de x, por

$$a(x) = 14x - 2x^2$$

Calcule $a(0)$ e interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

2. Nos itens seguintes, considere a função $a(x) = 14x - 2x^2$, definida no intervalo $[0, 7]$, no contexto descrito no grupo de itens anterior.

2.1. Mostre que a taxa de variação média da função a, no intervalo $[3, 4]$, é zero.

2.2. Do facto de a taxa de variação média da função a, no intervalo $[3, 4]$, ser zero, podemos concluir que a função a é constante no intervalo $[3, 4]$?

Justifique a sua resposta.

2.3. Atendendo ao orçamento existente, pretende-se que a zona relvada tenha a maior área possível.

Determine o valor de x para que tal aconteça.

3. O «jogo da moedinha» consiste no seguinte: cada jogador (num conjunto de dois ou mais) esconde zero, uma, duas ou três moedas, numa das suas mãos. Seguidamente, cada um dos jogadores tenta adivinhar o número total de moedas «escondidas».

O David e o Pedro jogam com frequência o «jogo da moedinha». Admita que cada um deles escolhe, aleatoriamente e com igual probabilidade, o número de moedas, entre zero e três, que vai esconder na sua mão.

3.1. Seja Y a variável aleatória «número total de moedas escondidas pelo David e pelo Pedro».

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória Y.

Indique se é mais provável que o número total de moedas escondidas pelo David e pelo Pedro seja menor do que dois ou maior do que três.

3.2. Considere X a variável aleatória «número de vezes por semana que os dois amigos se encontram para realizar o referido jogo».

Admita que a seguinte tabela corresponde à distribuição de probabilidade da variável X.

$X = x_i$	0	1	2	3	4
$P(X = x_i)$	$0{,}10$	$0{,}20$	a	$0{,}25$	$0{,}15$

Determine o valor de a e calcule o valor médio da variável aleatória X.

4. Thomas Malthus, pensador do século XVIII, elaborou um modelo para prever a evolução da população mundial. De acordo com este modelo, a população mundial **duplicaria**, de 25 anos em 25 anos.

Considerando que, no ano de 1900, a população mundial era de 1,65 mil milhões de pessoas, estime, de acordo com o Modelo de Malthus, qual teria sido o valor da população mundial em 2000.

Apresente o resultado em milhares de milhões, arredondado às unidades.

5. A população mundial, desde 1900, evoluiu de acordo com a tabela abaixo:

Ano	**Número de pessoas** (em milhares de milhões)
1900	1,65
1910	1,75
1920	1,86
1930	2,07
1940	2,30
1950	2,56
1960	3,04
1970	3,71
1980	4,45
1990	5,28
2000	6,08

Admita que a evolução da população mundial desde 1900 é bem modelada por uma função exponencial do número de pessoas, em que a variável independente designa o número de anos após 1900.

Estime a população mundial para 2010.

Recorra à calculadora e utilize a regressão exponencial para determinar a expressão de uma função que se ajuste aos dados da tabela, percorrendo as seguintes etapas:

- considere o ano de 1900 como o ano zero (0), o ano de 1910 como o ano dez (10), e assim sucessivamente até ao ano de 2000 como o ano cem (100);
- escreva essa expressão (apresente os valores numéricos envolvidos na expressão e fornecidos pela calculadora, com quatro casas decimais);
- usando essa expressão, estime a população mundial para 2010 (apresente o resultado em milhares de milhões de habitantes, arredondado às centésimas).

6. Na figura 2 está representado um pêndulo simples, E, oscilando no plano DAB.

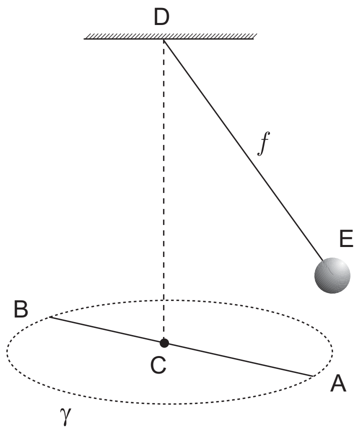

Fig. 2

Quando um pêndulo oscila à superfície da Terra, o plano de oscilação não se mantém fixo, vai rodando ao longo do tempo, em torno de um eixo vertical, representado na figura por CD, devido ao movimento de rotação da Terra. O tempo que decorre entre o início da oscilação do pêndulo e o momento em que o plano de oscilação do pêndulo completa uma rotação de 360º designa-se por *período*. Este período não é o mesmo em todos os lugares da Terra, pois depende da latitude do lugar em que se realiza a experiência. Vamos considerar apenas lugares do hemisfério norte.

A relação entre o período, T, medido em horas, e a latitude do lugar, q, medida em graus, estabelecida por Jean Foucault (1819-1868), em 1851, é:

$$T = \frac{24}{sen\,(q)} \qquad \text{(Lei do seno de Foucault)}$$

6.1. Mostre que, no Pólo Norte, o pêndulo tem um período de 24 horas. Recorde que a latitude no Pólo Norte é de 90º.

6.2. A latitude de Paris, onde Foucault realizou a experiência que confirmou a referida lei, é, aproximadamente, de 49º.

O João declarou ter feito uma experiência semelhante à de Foucault, nas mesmas condições, tendo obtido o valor de 48 horas para o período do pêndulo.

Num pequeno texto e usando apenas a lei do seno de Foucault:

- indique o período que Foucault terá registado na sua experiência de 1851;
- indique a latitude do local em que o João terá feito a sua experiência;
- comente, fundamentadamente, a possibilidade de a experiência do João poder ter sido realizada em Portugal Continental, sabendo que Portugal Continental está compreendido entre, aproximadamente, as latitudes 36º e 42º.

FIM

COTAÇÕES

1.		**30 pontos**
1.1.	10 pontos	
1.2.	20 pontos	
2.		**60 pontos**
2.1.	20 pontos	
2.2.	20 pontos	
2.3.	20 pontos	
3.		**40 pontos**
3.1.	20 pontos	
3.2.	20 pontos	
4.		**20 pontos**
5.		**20 pontos**
6.		**30 pontos**
6.1.	10 pontos	
6.2.	20 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\ r\ \ (\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha\ r^2}{2}$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$ $(r$ – *raio da base;* g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$ $(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\ \pi\ r^3$ $(r$ – *raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$