Proposta de Resolução do Exame Nacional Matemática B

Cód. 735 - 1ª Fase, 21 de Junho 2012

Grupo I

1.

A partir do gráfico da figura 1, obtemos uma tabela de frequências absolutas simples subtraindo as frequências acumuladas consecutivas:

n.º de livros	Freq. absoluta simples
0	5
1	15
2	15
3	25
4	15
5	5

Introduzindo estes valores em duas listas da calculadora, obtemos

min x = 0

1º quartil 1,5

mediana 3

3º quartil 3,5

máx x = 5

Então $a = 0$; $b = 1{,}5$; $c = 3$; $d = 3{,}5$ e $e = 5$.

2.

P(colocar uma bola) = P(sair um triângulo) $= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

P(tirar uma bola) $= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

Como a caixa tem inicialmente duas bolas, o "número de bolas que ficam na caixa após a criança ter realizado a atividade" é 3 ou 1.

Então

x_i	1	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

$$\mu = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times 3 =$$

$$= \frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3} \approx 2{,}3$$

O valor médio é aproximadamente 2,3 bolas que ficam na caixa.

3.

3.1. Introduzindo a tabela dada na calculadora, nas listas L_1 e L_2, obtivemos a regressão quadrática

$$y = ax^2 + bx + c$$

com $a \approx 0,0792$ $b \approx 0,0077$ $c \approx -0,3000$.

Introduzindo a expressão $ax^2 + bx + c$ como função y_1 e configurando a janela do gráfico para $x \in [0, 17]$, com a calculadora, CALC - 1: value - $x = 15$, obtive $y_1 \approx 17,6$.

A área estimada do polígono de 15 lados é aproximadamente 17,6 dm^2.

3.2.1. Uma progressão aritmética tem uma variação constante, por isso a expressão que a define é sempre um polinómio do 1º grau. Como a expressão que define d_n é do 2º grau, não pode ser uma progressão aritmética.

3.2.2. O polígono de 20 lados é a peça 20-2 = 18.

$$D_{18} = 0,5 \times 18^2 + 0,5 \times 18 - 1 = 170.$$

O número de diagonais de um polígono de 20 lados é 170.

Grupo II

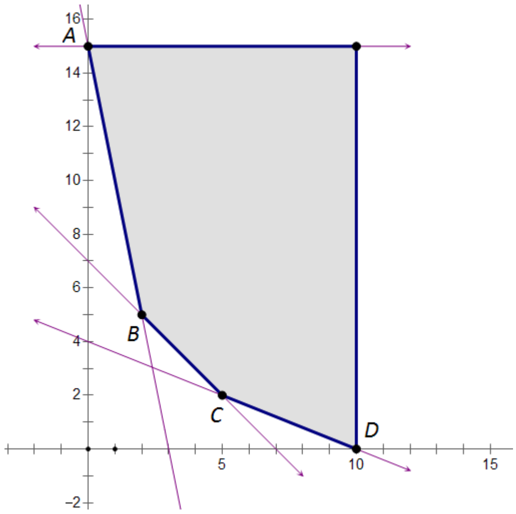
A função objetivo, que se pretende minimizar, é o custo e é dada por

$$C(x, y) = 5x + 2,5y$$

Restrições do problema:

$$\left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 15 \\ 30x + 75y \ge 300 \\ 75x + 15y \ge 225 \\ 45x + 45y \ge 315 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 15 \\ 2x + 5y \ge 20 \\ 5x + y \ge 15 \\ x + y \ge 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 \le x \le 10 \\ 0 \le y \le 15 \\ y \ge -0,4x + 4 \\ y \ge -5x + 15 \\ y \ge -x + 7 \end{array}\right.$$

A região admissível correspondente a este sistema de restrições, obtida na calculadora gráfica, é a seguinte,



em que os pontos de interseção têm as seguintes coordenadas

(obtidas com a funcionalidade CALC – 5:intersect)

A (0, 15)   B (2, 5)   C (5, 2)   D (10, 0)

Calculando o custo para cada um destes pontos, obtém-se

$$C\ (0, 15) = 5 \times 0 + 2{,}5 \times 15 = 32{,}5$$

$$C\ (2, 5) = 5 \times 2 + 2{,}5 \times 5 = 22{,}5$$

$$C\ (5, 2) = 5 \times 5 + 2{,}5 \times 2 = 30$$

$$C\ (10, 0) = 5 \times 10 + 2{,}5 \times 0 = 50$$

Donde se conclui que a solução ótima do problema, correspondente ao custo mínimo (22,50 €), é de 2 quilogramas de Granulado e 5 quilogramas de Farinha para suplemento diário de cada animal.

Grupo III

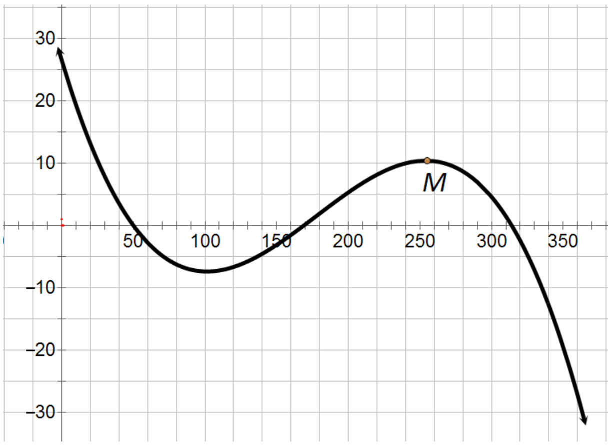
1. Janeiro – 31 dias; Fevereiro – 15 dias; o dia 15 de Fevereiro é o 46º dia do ano.

Introduzindo a função f na calculadora,

CALC – 1:value $x = 46$, vem $y = 1{,}31856...$

O resultado líquido no dia 15 de Fevereiro é de cerca de 1 319 euros.

2. O maior resultado líquido nos últimos 6 meses é o máximo relativo correspondente ao ponto M



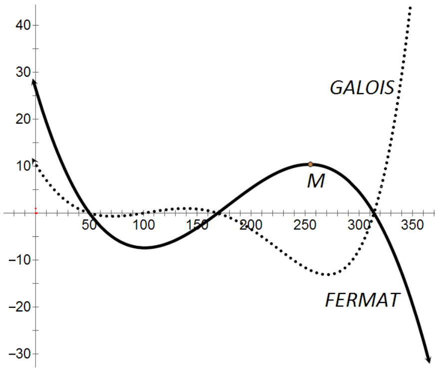
assinalado na representação gráfica da figura.

Com a calculadora gráfica

CALC – 4:maximum vem $x \approx 254$ e $y \approx 10{,}404$

Logo, o maior resultado líquido diário foi de cerca de 10 404 euros.

3. Colocando as duas expressões na calculadora, obtém-se a seguinte representação gráfica



Que se intersetam nos pontos correspondentes aos zeros de f, porque g é o produto de f por outra função.

Os zeros de f (obtidos com a calculadora, com CALC – 2: zero) são

$$x = 50 \quad \text{ou} \quad x = 169 \quad \text{ou} \quad x = 314$$

Estes números representam os dias em que os resultados líquidos foram iguais nas duas empresas. Por leitura do gráfico, vemos que $f(x) > g(x)$ quando

$$x < 50 \text{ ou } 169 < x < 314$$

O número total de dias em que o resultado líquido diário do departamento FERMAT foi superior ao do departamento GALOIS é

$$49 + (313 - 169) = 49 + 144 = 193 \text{ dias}$$

Grupo IV

1. A região S_1 é um segmento circular (região compreendida entre o arco e a corda) correspondente a um quarto de círculo, e é por isso semelhante ao segmento circular EGCD, que também corresponde a um quarto de círculo.

Como o raio do círculo maior é o dobro do raio do círculo menor, a razão de semelhança é 2 e por isso, a razão entre as áreas dos dois segmentos circulares é 4.

Então

Área do segmento circular $EGCD$ = 4 × área de S_1

Por outro lado,

Área do segmento circular $EGCD$ = 2 × (área de S_1 + área de S_2)

Igualando as duas expressões

$$4 \times \text{área de } S_1 = 2 \times (\text{área de } S_1 + \text{área de } S_2)$$

$$2 \times \text{área de } S_1 = \text{área de } S_1 + \text{área de } S_2$$

$$\text{área de } S_1 = \text{área de } S_2$$

2. O segmento BG é a hipotenusa do triângulo retângulo cujos catetos são raios, logo medem 2. Então $\overline{BG} = 2\sqrt{2}$

$$\overline{DG} = 4 - 2\sqrt{2}$$

O arco ED é um oitavo da circunferência de raio 4

$$\text{comprimento do arco } ED = \frac{2\pi \times 4}{8} = \pi$$

O arco EG é um quarto da circunferência de raio 2

$$\text{comprimento do arco } EG = \frac{2\pi \times 2}{4} = \pi$$

$$\text{Perímetro de } S_2 = 4 - 2\sqrt{2} + 2\pi \approx 4{,}31$$

O perímetro pedido é aproximadamente 4,31.

3.

3.1. $D_h = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

3.2. A área de S_3 é igual à diferença entre a área do setor circular CBD e a área do triângulo CBD.

A área do setor circular é diretamente proporcional à amplitude do ângulo:

$$\frac{\text{área do setor}}{\alpha} = \frac{\pi \times 4^2}{2\pi}$$

$$\text{área do setor} = \frac{16\pi}{2\pi} \times \alpha$$

$$\text{área do setor} = 8\alpha$$

A área do triângulo é dada por:

$$\text{área do triângulo} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$

Mas.

$$\frac{\text{altura}}{4} = \text{sen } \alpha \Leftrightarrow \text{altura} = 4 \text{ sen } \alpha$$

Então,

$$\text{área do triângulo} = \frac{4 \times 4 \text{ sen } \alpha}{2} = 8 \text{ sen } \alpha$$

Portanto

$$\text{Área de } S_3 = 8\alpha - 8 \text{ sen } \alpha$$